

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Институт динамики систем и теории управления

Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Жевлаков Алексей Сергеевич

**Вклад в аномальный магнитный момент мюона от процесса рассеяния света
на свете в нелокальной кварковой модели.**

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., в.н.с.

Раджабов А.Е.

г.Иркутск – 2014

Оглавление

Введение.	4
Аномальный магнитный момент мюона.	4
Адронный вклад в АММ мюона	7
1 Нелокальная кварковая модель	11
1.1 $SU(2) \times SU(2)$ кварковая модель	11
1.2 $SU(3) \times SU(3)$ кварковая модель	13
1.3 Эффективный пропагатор мезона. Вершинная функция.	15
1.3.1 Внешние калибровочные поля. Выбор параметров модели.	19
1.4 Выводы.	20
2 Рассеяние света на свете I. Промежуточное мезонное состояние.	22
2.1 Промежуточное мезонное состояние	24
2.2 Промежуточное псевдоскалярное мезонное состояние.	26
2.2.1 Амплитуда перехода псевдоскалярного состояния в два фотона.	26
2.2.2 Вычисление АММ мюона для процесса рассеяния света на свете с про- межуточным псевдоскалярным мезонным состоянием	28
2.3 Промежуточное скалярное мезонное состояние	35
2.3.1 Амплитуда перехода скалярного мезона в два фотона	35
2.3.2 Локальный предел для амплитуды перехода скалярного мезона в два фотона	40

2.3.3	Вклад от процесса рассеяния света на свете с промежуточным скалярным мезонным состоянием в АММ мюона.	41
2.3.4	SU(2) - случай параметризации модели. Локальный предел.	43
2.4	Выводы	46
3	Рассеяние света на свете II. Случай контактных диаграмм.	47
3.1	Диаграмма кварковый бокс. Тензор рассеяния света на свете	49
3.2	Вычисление рассеяния света на свете для случая контактных диаграмм.	50
3.2.1	Локальный случай	51
3.3	Результаты	53
3.4	Дискуссия	57
3.5	Выводы	60
	Заключение	62
A	Приложение	64
A.1	Нелокальные вершины взаимодействия с внешним векторным полем	64
A.2	Смешивание	75
A.3	Структуры полиномов после усреднения по импульсу мюона	77
	Литература	80

Введение.

Аномальный магнитный момент мюона.

Движение классической заряженной [1,2] частицы с угловым моментом $L = r \times p$ создает магнитный момент $\mu = \frac{e}{2mc}L$. В квантово-механическом случае у частицы появляется такая характеристика движения, как собственный момент вращения, именуемый спином. Спин также как и угловой момент движения приобретает смысл оператора $L = \hbar l = -i\hbar r \times \nabla$ и $S = \hbar s$ и имеет собственные значения в единицах постоянной Планка. Уравнение движения можно представить уравнением Дирака:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{p^2}{2m} - \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \vec{B} \right] \psi. \quad (1)$$

Магнитный момент связан со спином как и с орбитальный моментом частицы, как

$$\mu = g \frac{e\hbar}{2mc} s,$$

где введена новая постоянная g , которая носит название гиромагнитного отношения. Для орбитального движения такой оно равно 1, и поэтому исходя из уравнения Дирака для заряженной частицы со спином $s = \frac{1}{2}$ получаем, что $g_s = 2$ в квантовой механике. Такая величина, как аномальный магнитный момент (АММ), связана с тем, что с учетом квантовых поправок существует отклонение гиромагнитного отношения от величины $g = 2$. Удобно параметризовать эту величину как $a = (g - 2)/2$.

Если рассматривать квантовую теорию поля, которая описывает физику частиц и взаимодействия их с внешними полями, то можно записать ток, описывающий взаимодействие

фермионов с внешним электромагнитным полем.

$$-ie\bar{u}(p')\left\{\gamma_{\mu}F_1(q^2)+i\sigma_{\mu\nu}\frac{q_{\nu}}{2m}F_2(q^2)\right\}u(p)e_{\mu}(q), \quad (2)$$

где F_1 и F_2 -электрический и магнитный форм-фактор соответственно, u и \bar{u} - функции, описывающие входящий и выходящий фермион, а e_{μ} – вектор поляризации фермиона, γ_{μ} и $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]$ - это сама матрица Дирака и коммутатор, соответственно.

Магнитный форм-фактор связан с магнитным моментом частицы, и АММ можно вычислить, как $a = (g - 2)/2 = F_2(0)$. Отличие гиромагнитного отношения от двойки обусловлено существованием на квантовом уровне радиационных поправок, отсутствующих на классическом.

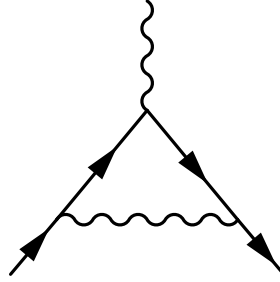


Рис. 1: Поправка, вычисленная Д.С. Швингером в 1949 году.

Лидирующий вклад был вычислен Д.С. Швингером Рис.2.1 в 1949 году

$$a = \frac{\alpha}{2\pi};$$

который является одинаковым как для электрона, так и для мюона. Вклады более высокого порядка по теории возмущений уже могут отличаться.

В 1956 году данная величина была измерена Х.Толхоком экспериментально [3], с точность один-полпроцента $g = 2.00 \pm 0.01$, а также Крайном с соавторами [4,5] $a = (g-2)/2 \approx 0.00119$.

Одновременно, Берестецким с соавторами [6,7] было показано, что АММ лептонов чувствителен к проявлению масштаба проявления взаимодействия (“новой физики”).

$$\frac{\delta a_l}{a_l} = \frac{m_l^2}{\Lambda^2},$$

где Λ – константа ультрафиолетового обрезания, характеризующая масштаб предполагаемого взаимодействия. Можно легко увидеть, что так как масса мюона больше массы электрона, он является более чувствительным к различным взаимодействиям (почти в ~ 40000 раз), чем электрон. Тау-лептон, еще более массивный чем мюон, имеет короткое время жизни, что делает его сложным объектом для изучения на эксперименте с точностью, сравнимой той, что возможна для электрона и мюона. Поэтому мюон представляется хорошим кандидатом для изучения проявлений различных взаимодействий и согласованности теоретических предсказаний с экспериментальными измерениями.

Недавний эксперимент E821 [8] в Брукхевенской Национальной Лаборатории (BNL) в США был выполнен с поразительно высокой точностью.

Величина, полученная из эксперимента E821:

$$a_{\mu}^{\text{exp}} = 11\,659\,208.0(6.3) \cdot 10^{-10}.$$

Предсказания в рамках стандартной модели:

$$a_{\mu}^{\text{theory}} = 11\,659\,179.0(6.5) \cdot 10^{-10}.$$

В данный момент отличие экспериментальных измерений от теоретических оценок различными группами [9] находится на уровне $3 \sim 3.5$ стандартных отклонений.

Кроме этого, в ближайшие годы планируется провести новые эксперименты, посвященные измерению АММ мюона, что позволит повысить точность измерений, в BNL [10, 11], а второй в Японии в J-Park лаборатории [12, 13].

Для оценки разницы между теоретическим предсказанием и экспериментом, требуется рассчитать в рамках Стандартной модели вклады в АММ мюона с точностью, которая не хуже достигнутой на эксперименте.

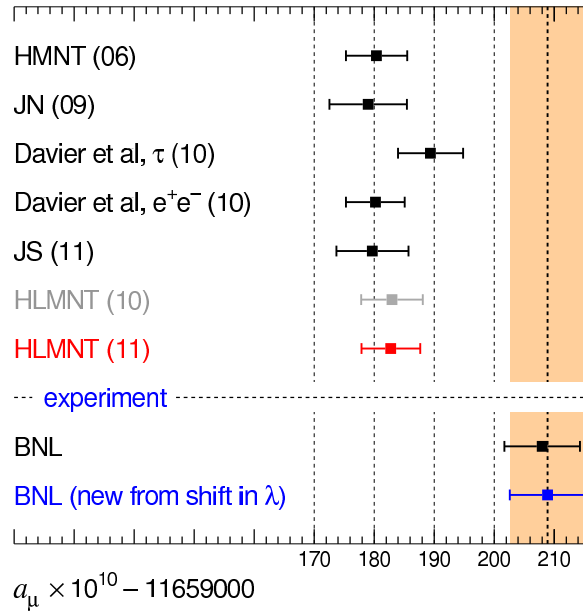


Рис. 2: Результаты расчета АММ мюона различных групп в сравнение с экспериментальными данными E821, из статьи [10]

Адронный вклад в АММ мюона

Основную неопределенность вычислениям в аномальный магнитный момент мюона вносит адронный вклад. Данный вклад можно разделить на две основных части: вклад от адронной поляризации вакуума и вклад от процесса рассеяния света на свете рис.4. Вклад от адронной поляризации вакуума можно извлечь из экспериментальных данных по измерению сечения рассеяния $e^+e^- \rightarrow$ адроны [14] и $\tau \rightarrow$ адроны [16] при помощи оптической теоремы.

Величина вклада, связанная с адронной поляризацией вакуума, сейчас оценивается [15] на уровне

$$a_{\mu}^{\text{Had,LO}} = 690.9(4.4) \cdot 10^{-10}, \quad (3)$$

а радиационная поправка к поляризации вакуума оценивается:

$$a_{\mu}^{\text{Had,HO}} = -9.8(0.1) \cdot 10^{-10}. \quad (4)$$

Вклад от рассеяния света на свете (LbL) невозможно извлечь из данных каких-либо

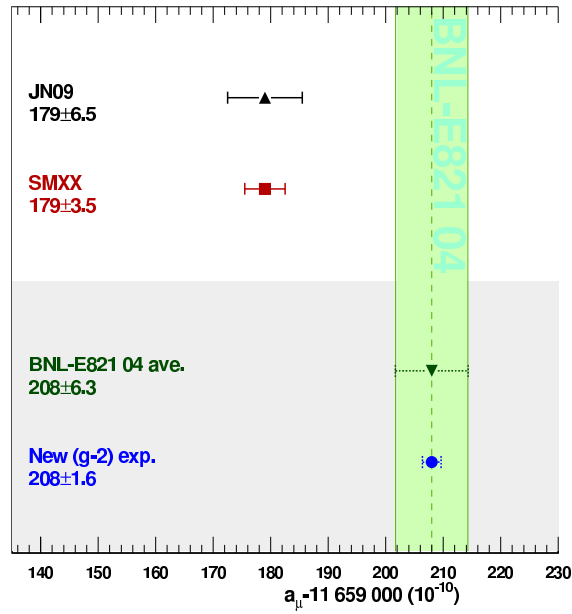


Рис. 3: Предсказание отличия в существующих теоретических расчетах с будущими прецизионными результатами экспериментов, из статьи [10].

экспериментов, поэтому очень важно иметь наиболее маленькую ошибку в теоретических вычислениях этого вклада в области физических параметров. Для этого используются различные модели для описания физики, происходящей при низких энергиях. В основном их можно разделить на две подгруппы. Первая из них основана на мезон доминантном подходе [16–18] и вторая группа, которая рассматривает эффективные модели основанные из КХД и использующие динамические кварки, как эффективные степени свободы. Сюда входят различные версии модели Намбу–Иона-Лазинио [19] [20] [21], конституентные кварковые модели [22], модели, основанные на непертурбативной кварк-глюонной динамике, подобные нелокальной кварковой модели [23], или основанные на уравнении Дайсона-Швингера [24].

Для вклада от процесса LbL существует несколько оценок, к примеру [25]

$$a_{\mu}^{\text{Had,LbL}} = 8(4) \cdot 10^{-10}. \quad (5)$$

с довольно большой ошибкой. Помимо этого, существует неопределенность в понимании того, какой вклад подпроцесса LbL дает наибольший вклад. Поэтому довольно важно до-

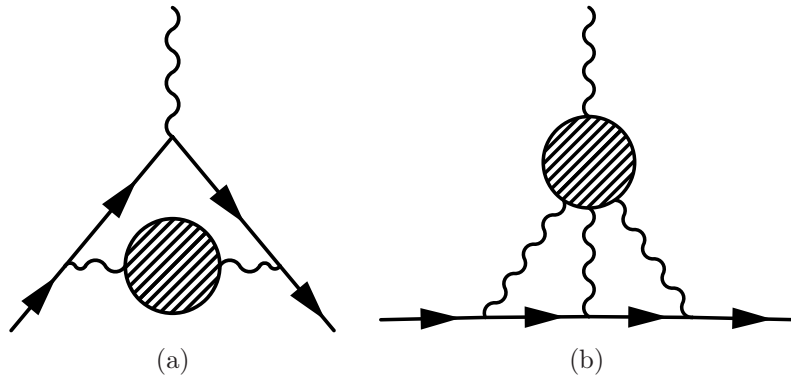


Рис. 4: Адронный вклад в АММ: (а) от адронной поляризации вакуума, (b) - от процесса рассеяния света на свете.

вильно точно вычислить LbL вклад в рамках модели, учитывая все диаграммы (в первом порядке по $1/N_c$), чему и будет посвящена данная работа.

Первая глава посвящена построению кварковой модели с нелокальным сепарабельным взаимодействием. Нелокальность взаимодействия выбирается в форме, схожей с моделью вакуума квантовой хромодинамики (КХД) как жидкости инстантонов. Обсуждаются свойства мезонов и введение в модель внешних калибровочных полей. Во второй главе обсуждается классификация диаграмм различных типов (контактных и с участием промежуточного мезонного состояния), дающих вклад в процесс рассеяния света на свете. Даны выражения форм-факторов перехода нейтральных псевдоскалярных и скалярных мезонов в два фотона. Приводятся результаты вычисления вклада в АММ мюона от диаграмм с участием скалярных и псевдоскалярных промежуточных состояний. В третьей главе рассматриваются диаграммы контактного типа. Нелокальное взаимодействие приводит к появлению многофотонных вершин взаимодействия калибровочных полей с кварками. В результате, помимо обычных контактных диаграмм с четырьмя локальными вершинами взаимодействия кварков с фотонами (диаграмма типа "бокс"), появляются диаграммы с меньшим числом вершин взаимодействия. Дается полный набор диаграмм различной топологии, необходимой для вычисления вклада контактного типа. Приводятся результаты численных расчетов вклада в аномальный момент мюона от диаграмм контактного типа.

Основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1) Построен явный вид вершинных функций, описывающих нелокальное взаимодействие кварков с тремя или с четырьмя внешними калибровочными полями. Построены формфакторы перехода скалярных и псевдоскалярных мезонов в два виртуальных фотона.

2) Вычислен вклад в аномальный магнитный момент мюона от процесса рассеяния света на свете с участием легких скалярных и псевдоскалярных мезонных состояний.

3) Вычислен вклад в аномальный магнитный момент мюона от процесса рассеяния света на свете в случае контактной диаграммы типа кварковый бокс.

Глава 1

Нелокальная кварковая модель

1.1 $SU(2) \times SU(2)$ кварковая модель

Лагранжиан нелокальной кварковой модели в простейшем случае $SU(2) \times SU(2)$ киральной симметрии имеет вид [26]

$$\mathcal{L} = \bar{q}(x)(i\hat{\partial} - m_c)q(x) + \frac{G}{2} \left[J_S^a(x)J_S^a(x) + J_P^a(x)J_P^a(x) \right] \quad (1.1)$$

где $q(x)$ - кварковые поля, m_c - диагональная матрица токовых масс кварков, G - константа четырех-кваркового взаимодействия. Нелокальные токи, представленные в лагранжиане, записываются в виде

$$J_M^a(x) = \int d^4x_1 d^4x_2 f(x_1)f(x_2) \bar{q}(x-x_1) \Gamma_M^a q(x+x_2), \quad (1.2)$$

где $f(x)$ - нелокальные форм-факторы, нормированные условием $f(0) = 1$. Матрицы Γ_i задаются следующими выражениями:

$$\Gamma_\pi = \tau^a \gamma^5; \quad \Gamma_\sigma = 1; \quad (1.3)$$

где τ^a - это матрицы Паули, которые являются генераторами группы $SU(2)$, γ - матрицы Дирака. Такой лагранжиан (1.1) может быть мотивирован моделью вакуума КХД, как жидкости инстантонов.

Следует отметить, что это не единственный способ построения нелокальной кварковой модели (см. например, модель конфаймированных кварков (МКК) [27, 28]).

Взаимодействие кварков, индуцированное инстантонным взаимодействием, которое порождает слагаемое, обуславливающее 4-х кварковое взаимодействие в лагранжиане, ответственно за сильные, зависящие от спина, связи в мезонных мультиплетах. Данное взаимодействие является притягивающим, в частности, для псевдоскалярного октета. Если данное притяжение будет достаточным сильным, то оно может перестроить вакуум и связать кварк и антикварк в связанное состояние голдстоуновского бозона.

Действие можно бозонизовать, используя то, что производящий функционал имеет гауссов вид [29]

$$\int D\Phi \exp\left(i \int \pm A\Phi - B\Phi\right) = \frac{1}{\tilde{N}} \exp i \int d^4x \frac{A}{4B}; \quad (1.4)$$

в результате такой операции действие примет вид

$$S(q, \bar{q}, \sigma, \pi) = i \int d^4x (\bar{q}i(\hat{\partial} - m_c)q - \frac{1}{2G_1}(\tilde{\sigma}^2 + \pi^2) - (\tilde{\sigma}J_\sigma(x) + \pi J_\pi^a(x))). \quad (1.5)$$

где $\tilde{\sigma}, \pi$ – поля мезонов σ, π , соответственно. Поле $\tilde{\sigma}$ имеет ненулевое вакуумное среднее, в результате спонтанного нарушения киральной симметрии т.е. $\langle \sigma \rangle_0 = \sigma_0 \neq 0$. Для того чтобы получить физическое скалярное поле, нужно произвести сдвиг скалярного поля [30] $\tilde{\sigma} = \sigma + \sigma_0$.

Проварьировав действие по вакуумному ожиданию скалярного поля, можно получить уравнение на динамическую массу кварка

$$\sigma_0 = iG_1 N_c N_f \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{f^2(k^2)}{\hat{k} - m(k^2)}; \quad (1.6)$$

$$m(p^2) = m_c + iG_1 N_c N_f f^2(p^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \frac{f^2(k^2)}{\hat{k} - m(k^2)}; \quad (1.7)$$

где $m(k^2) = m_c + \sigma_0 f^2(k^2)$.

Пропагатор кварка имеет вид:

$$S^{-1}(k) = \hat{k} - m(k^2). \quad (1.8)$$

1.2 $SU(3) \times SU(3)$ кварковая модель

Лагранжиан нелокальной кварковой модели в случае группы $SU(3) \times SU(3)$ записывается в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{q}(x)(i\hat{\partial} - m_c)q(x) + \frac{G}{2} \left[J_S^a(x)J_S^a(x) + J_P^a(x)J_P^a(x) \right] - \\ & - \frac{H}{4} T_{abc} \left[J_S^a(x)J_S^b(x)J_S^c(x) - 3J_S^a(x)J_P^b(x)J_P^c(x) \right], \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $q(x)$ - кварковые поля, m_c - диагональная матрица токовых масс кварков ¹, G и H соответственно константы связи четырех- и шести- кваркового взаимодействия, которое обусловлено взаимодействием через инстантоны. Последнее слагаемое в лагранжиане представляет определитель вершины т'Хофта. Он приводит к смешиванию кварков различного аромата. Структурная константа имеет вид:

$$T_{abc} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mnl} (\lambda_a)_{im} (\lambda_b)_{jn} (\lambda_c)_{kl}, \quad (1.10)$$

где λ_a - матрицы Гелл-Манна, $a = 1, \dots, 8$ и $\lambda_0 = \sqrt{2/3}I$. Нелокальные токи записанные в лагранжиане имеют вид:

$$J_{ch}^a(x) = \int d^4x_1 d^4x_2 f(x_1) f(x_2) \bar{q}(x-x_1) \Gamma_{ch}^a q(x+x_2), \quad (1.11)$$

где индекс $ch = S, P$ означает скалярный или псевдоскалярный канал ($\Gamma_S^a = \lambda^a$ - для скалярного канала и $\Gamma_P^a = i\gamma^5 \lambda^a$ - для псевдоскалярного), а $f(x)$ есть формфактор нелокального взаимодействия кварков.

В отличие от $SU(2)$ модели бозонизация не может быть точной ввиду наличия взаимодействия т'Хофта. Один из возможных способов проведения бозонизации был предложен в работе [31], приближение стационарной фазы. Где в частности используется то что еди-

¹ в расчетах будет рассматриваться изоспиновый предел, когда $m_{c,u} = m_{c,d} \neq m_{c,s}$.

ничный оператор можно представить как,

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \int \Pi_a \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \delta(\sigma_a - \bar{q} \frac{1}{2} \lambda_a q) \delta(\pi_a - \bar{q} \gamma_5 \frac{1}{2} \lambda_a q) = \\ &= \int \Pi_a \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \exp \left(i \int S_a (\sigma_a - \bar{q} \frac{1}{2} \lambda_a q) + P_a (\pi_a - \bar{q} \gamma_5 \frac{1}{2} \lambda_a q) \right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Основные результаты этого метода были применены позже к нелокальной модели [32]

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\sigma_a \mathcal{D}\pi_a \det A \int \mathcal{D}S_a \mathcal{D}P_a \exp \left[\int d^4x (\sigma_a S_a + \pi_a P_a) \right] \times \\ &\times \exp \left\{ \int d^4x \left[\frac{G}{2} (S_a S_a + P_a P_a) + \frac{H}{4} A_{abc} (S_a S_b S_c - 3 S_a P_b P_c) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где оператор A стоящий в детерминанте в импульсном пространстве, имеет вид:

$$\begin{aligned} A(p, p') &= (-\not{p} + \hat{m}_c) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \\ &+ f(p) [\sigma_a(p - p') + i\gamma_5 \pi_a(p - p')] \lambda_a f(p'). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Если проварьировать полученное действие по полям $\tilde{S}_a(\sigma_b(x), \pi_c(x))$ и $\tilde{P}_a(\sigma_b(x), \pi_c(x))$, то получим уравнения связывающие наши вспомогательные поля и поля мезонов и уравнения на константы связи, стоящие в лагранжиане

$$\begin{aligned} \sigma_a + G \tilde{S}_a + \frac{3H}{4} A_{abc} [\tilde{S}_b \tilde{S}_c - \tilde{P}_b \tilde{P}_c] &= 0, \\ \pi_a + G \tilde{P}_a - \frac{3H}{2} A_{abc} \tilde{S}_b \tilde{P}_c &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Уравнение на массу $M_i(p)$ получается решением данных уравнений, полученных при вариации эффективного действия по вспомогательному полю \tilde{S}_a , так как оно также зависит от полей $\sigma(x)$ и $\pi(x)$, получим уравнения для \bar{S}_i .

$$\bar{S}_i = -8 N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{M_i(p) f^2(p)}{p^2 + M_i^2(p)}, \quad (1.16)$$

где

$$S_u = \sqrt{\frac{2}{3}} S_0 + S_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} S_8, \quad S_d = \sqrt{\frac{2}{3}} S_0 - S_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} S_8,$$

$$S_s = \sqrt{\frac{2}{3}} S_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} S_8.$$

Выражение для массы, зависящей от импульса, принимает вид

$$M_i(p) = m_c^i + m_d^i f^2(p) \quad (1.17)$$

1.3 Эффективный пропагатор мезона. Вершинная функция.

Симметрия эффективного действия является спонтанно нарушенной, т.е., скаляр σ_a имеет нетривиальное вакуумное среднее $\bar{\sigma}_a$, в то время как псевдоскаляр остается с нулевым вакуумным средним. Это можно записать как

$$\begin{aligned} \sigma_a(x) &= \bar{\sigma}_a + \delta\sigma_a(x), \\ \pi_a(x) &= \delta\pi_a(x). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Важно отметить, что из-за сохранения заряда только диагональные компоненты $\bar{\sigma}_{a=0,3,8}$ могут быть отличны от нуля. Более того, σ_3 исчезает при рассмотрении изоспинового предела ($m_u^c = m_d^c$). После замены (1.18) бозонизованных полей, уравнение.1.13 можно разложить до второго порядка по $\delta\sigma_a(x)$ и $\delta\pi_a(x)$, что даст [32]

$$S_E = S_E^{MFA} + S_E^{quad} + \dots, \quad (1.19)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{S_E^{MFA}}{V^{(4)}} &= -2 N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \ln [p^2 I_{3 \times 3} + \Sigma^2(p)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\sum_i \left(\bar{\sigma}_i \bar{S}_i + \frac{G}{2} \bar{S}_i \bar{S}_i \right) + \frac{H}{2} \bar{S}_u \bar{S}_d \bar{S}_s \right]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Для удобства можно сделать переход к новым переменным, соответствующим диагональным компонентам S_i , с $i = u, d, s$ (или тождественно $i = 1, 2, 3$)

$$S_u = \sqrt{\frac{2}{3}} S_0 + S_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} S_8, \quad (1.21)$$

$$S_d = \sqrt{\frac{2}{3}} S_0 - S_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} S_8, \quad S_s = \sqrt{\frac{2}{3}} S_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} S_8,$$

Второе слагаемое в эффективном действии уравнения (1.19) отвечает квадратичным мезонным флуктуациям, которое может быть записано следующим образом

$$S_E^{quad} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[G_{ij,kl}^+(p) \delta\sigma_{ij}(p) \delta\sigma_{kl}(-p) + G_{ij,kl}^-(p) \delta\pi_{ij}(p) \delta\pi_{kl}(-p) \right], \quad (1.22)$$

где

$$\delta\pi_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} + \frac{\eta_0}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}_{ij}. \quad (1.23)$$

Другой способ работы с эффективной моделью может быть связан с построением уравнений Дайсона–Швингера (ДС) для кваркового пропагатора и Бете–Солпитера (БСУ) для связанных состояний. Физические результаты не будут зависеть от способа работы (по крайней мере в лидирующем порядке по $1/N_c$ можно получить однозначное соответствие для бозонизованной и небозонизованной модели.)

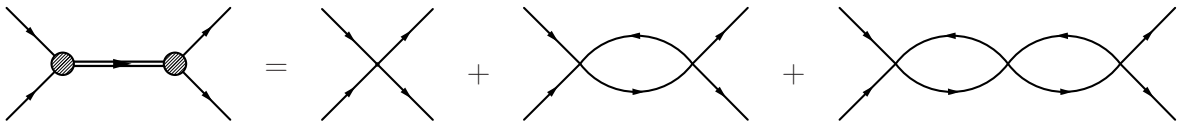


Рис. 1.1: Пропагатор мезона. Схематичное изображение БСУ в лестничном приближении.

Сепарабельное ядро взаимодействия позволяет записать матрицу рассеяния $q\bar{q}$ в T форме:

$$T(p_1, p_2, p_3, p_4) = \prod_n f(p_n) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \hat{T}(q), \quad (1.24)$$

где $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ полный импульс пары кварка и антикварка. Тогда матрица рассеяния представляется в виде:

$$\hat{T}(q) = \Gamma_{ch}^k \left(\frac{1}{-\mathbf{G}_{ch}^{-1} + \Pi_{ch}(q^2)} \right)_{kl} \Gamma_{ch}^l. \quad (1.25)$$

Матрицы \mathbf{G}_{ch} и Π_{ch} являются соответственно матрицами 4-х кваркового взаимодействия констант и поляризационного оператора мезона, соответствующего определенному каналу ch , скалярному или псевдоскалярному. Массу мезона можно найти как полюс для \hat{T} -матрицы, для чего необходимо разрешить систему $\det(\mathbf{G}_{ch}^{-1} - \Pi_{ch}(-M_M^2)) = 0$. Подробный вид матриц \mathbf{G}_{ch} и Π_{ch} , а также выражение для вычисления угла смешивания, представлены в Приложении А.2

Матрица \hat{T} для системы мезонов в каждом нейтральном канале может быть представлена как:

$$\hat{\mathbf{T}}_{ch}(P^2) = \sum_M \frac{\bar{V}_M(P^2) \otimes V_M(P^2)}{-(P^2 + M_M^2)}, \quad (1.26)$$

где M_M есть масса мезона, а $\bar{V}_M(P^2)$ есть вершинная функция этого мезона

$$\bar{V}_M(p^2) = \gamma^0 V_M^\dagger(P^2) \gamma^0. \quad (1.27)$$

Сумма в выражении (1.26) для \hat{T} -матрицы идет по всему набору легких (нейтральных) псевдоскалярных (π^0, η, η') или скалярных ($a_0(980), f_0(980), \sigma$) мезонов. В общем случае при рассмотрении системы трех кварков с разными массами необходимо рассматривать полную систему $\pi^0 - \eta - \eta'$ и $a_0 - \sigma - f_0$. Однако в случае изоспиновой симметрии ($m_u = m_d \neq m_s$) можно рассматривать отдельно π^0 и $\eta - \eta'$ систему и так же для a_0 и $\sigma - f_0$ скаляров. Для соответствующей системы можно диагонализировать матрицу рассеяния следующими ортогональными преобразованиями:

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_P & -\sin \theta_P \\ \sin \theta_P & \cos \theta_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ f_0(980) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_S & -\sin \theta_S \\ \sin \theta_S & \cos \theta_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_8 \\ \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Как результат, вершинные функции мезонов имеют вид:

$$\begin{aligned} V_{\pi_0}(P^2) &= ig_{\pi_0}(P^2)\lambda_3, \\ V_{\eta}(P^2) &= ig_{\eta}(P^2)(\lambda_8 \cos \theta_P(P^2) - \lambda_0 \sin \theta_P(P^2)), \\ V_{\eta'}(P^2) &= ig_{\eta'}(P^2)(\lambda_8 \sin \theta_P(P^2) + \lambda_0 \cos \theta_P(P^2)), \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} V_{a_0}(P^2) &= ig_{a_0}(P^2)\lambda_3, \\ V_{\sigma}(P^2) &= ig_{\sigma}(P^2)(\lambda_8 \cos \theta_S(P^2) - \lambda_0 \sin \theta_S(P^2)), \\ V_{f_0}(P^2) &= ig_{f_0}(P^2)(\lambda_8 \sin \theta_S(P^2) + \lambda_0 \cos \theta_S(P^2)), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где $g_M(P^2)$ и $\theta(P^2)$ являются уже перенормированными константами и углами смешивания (Приложение.А.2), которые зависят от виртуальности мезона. Перенормируемую константу связи для мезона можно определить как

$$g_M^2(P^2) = -(P^2 + M_M^2)D_M(P^2). \quad (1.31)$$

1.3.1 Внешние калибровочные поля. Выбор параметров модели.

Для введения калибровочного поля используется способ раздвижки кварковых полей при помощи Швингеровского фазового фактора $E(x, y)$

$$q(y) \rightarrow Q(x, y) = E(x, y)q(y), \quad (1.32)$$

где

$$E(x, y) = \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_x^y dz^\mu [\mathcal{V}_\mu^a(z) + \mathcal{A}_\mu^a(z) \gamma_5] T^a \right\}, \quad (1.33)$$

и, в свою очередь, \mathcal{V}_μ^a и \mathcal{A}_μ^a есть внешние векторное и аксиал-векторное поле соответственно, $T^a \equiv \lambda^a/2$. $\mathcal{P} \exp$ задает порядок взаимодействия при помощи контурного интеграла [33]

$$\frac{\partial}{\partial y^\mu} \int_x^y dz^\nu F_\nu(z) = F_\mu(y), \quad \delta^{(4)}(x-y) \int_x^y dz^\nu F_\nu(z) = 0,$$

В результате такого преобразования, кинетическая часть дает обычное локальное взаимодействие с калибровочным полем:

$$\int d^4x d^4y \delta(x-y) \bar{Q}(x, z) i \hat{\partial}_y Q(z, y) \rightarrow \int d^4x d^4y \delta(x-y) \bar{q}(x) i \hat{D}_y q(y);$$

$$i \hat{D}_y = i \hat{\partial}_y + \hat{V}(y) + \hat{A}(y) \gamma_5.$$

Однако, слагаемые взаимодействия с нелокальным кварковым током дают добавочные вершины, приведенные в Приложение А.1.

Для численных оценок в расчетах используется нелокальный форм-фактор в форме Гауссовой экспоненты, $f(K^2) = \exp(-K^2/2\Lambda^2)$ для Евклидова импульса. Модельные параметры для данного форм-фактора будут использоваться для вычислений взятые из статьи [32].

В SU(3)-модели имеется пять параметров: токовая масса кварка m_c и константы G четырех- и H шести- кваркового взаимодействия соответственно, а также масштаб нело-

set	$m_{c,u}$ [MeV]	$m_{d,u}$ [MeV]	$m_{c,s}$ [MeV]	$m_{d,s}$ [MeV]	Λ [MeV]	$G\Lambda^2$	$H\Lambda^5$
G_I	8.5	304.5	223	427	709	21.986	-1670.19
G_{II}	8.5	304.5	223	439	709	22.898	-1557.28
G_{III}	8.5	304.5	223	422	709	21.605	-1717.59
G_{IV}	7.5	287.5	199	408	768	20.896	-1721.69

Таблица 1.1: Модельные параметры, полученные в статье [32].

кальности Λ^2 фиксируются на наблюдаемые величины, такие как массы пиона и каона, константу слабого распада пиона f_π , массу η' (для параметров G_I, G_{IV}) или константу распада $\eta' \rightarrow \gamma\gamma$ в два фотона $g_{\eta'\gamma\gamma}$ (для наборов параметров G_{II}, G_{III}).

set	M_π [MeV]	M_η [MeV]	$M_{\eta'}$ [MeV]	$g_{\pi\gamma\gamma}$ [GeV $^{-1}$]	$g_{\eta\gamma\gamma}$ [GeV $^{-1}$]	$g_{\eta'\gamma\gamma}$ [GeV $^{-1}$]
G_I	138.9	516.5	958.4	0.2706	0.3082	0.3752
G_{II}	138.9	505.4	878.6	0.2706	0.3259	0.3401
G_{III}	138.9	520.7	1006.4	0.2706	0.3011	0.3489
G_{IV}	139.0	522.1	> 739.7	0.2713	0.3068	
exp	134.9766 ± 0.0006	547.8533 ± 0.024	957.78 ± 0.06	0.2744 $^{+0.009}_{-0.008}$	0.2726 ± 0.008	0.3423 ± 0.014

Таблица 1.2: Основные параметры легких псевдоскалярных мезонов, полученные для различных параметризаций модели в статье [32].

1.4 Выводы.

В данной главе были рассмотрены основные свойства нелокальной киральной кварковой модели. Нелокальность этой модели конструируется по аналогии с моделью инстантонной жидкости [26, 32, 34, 35] и обуславливает появление многокваркового взаимодействия, что показал т'Хофт [36].

Исходя из модели, были изучены свойства кварка, который получает в результате спонтанного нарушения симметрию динамическую массу. Эта масса в свою очередь обуслав-

²Параметр нелокальности Λ следует обеспечивает обрезание интегралов и обуславливает их сходимости. Данный параметр следует из инстантонной модели, по аналогии с которой строится $N_\chi QM$, где он играет роль размера инстантона [26].

ливают массу мезона, которая находится в результате построения мезонного пропагатора из БСУ. Было показано, что нелокальное взаимодействие порождает дополнительные вершинные функции, в отличие от локальной модели типа Намбу–Иона-Лазинио [37–39]. Им подробно уделено внимание в приложении, так как эти вершинные являются важными для описания свойств мезонов и вычисления АММ мюона в процессе LbL.

В конце данной главы приведена таблица показывающая, что в рамках данной модели можно воспроизвести основные свойства мезонов, в результате чего на эти свойства и производится фитирование параметров модели. Кроме того, фитирование с учетом ошибки эксперимента задает также диапазон достоверности для теоретических расчетов в рамках модели.

Глава 2

Рассеяние света на свете I.

Промежуточное мезонное состояние.

Процесс рассеяния света на свете через непертурбативный вакуум квантовой хромодинамики вносит существенную неопределенность в оценки АММ мюона. Вклад от процесса рассеяния света на свете невозможно извлечь из каких-либо экспериментальных данных, а также вычислить исходя, из первых принципов КХД, так как существенная часть данного вклада связана с низкими энергиями, где сильная константа связи не мала и теория возмущения неприменима. Поэтому весьма разумным представляется оценить данный процесс в рамках нелокальной кварковой модели.

Основным элементом для вычисления вклада от процесса рассеяния света на свете в аномальный магнитный момент является тензор четвертого ранга кварк-адронной поляризации вакуума

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu\lambda\rho}(q_1, q_2, q_3) = & \hspace{15em} (2.1) \\ = \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 e^{i(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3)} & \langle 0 | T(j_\mu(x_1)j_\nu(x_2)j_\lambda(x_3)j_\rho(0)) | 0 \rangle, \end{aligned}$$

где $j_\mu(x)$ - электромагнитный ток, а фокковское состояние $|0\rangle$ отвечает состоянию вакуума КХД.

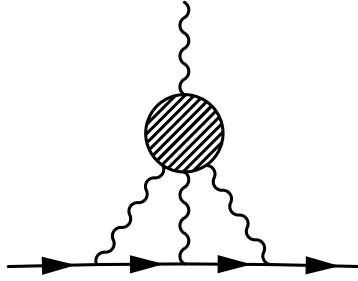


Рис. 2.1: Диаграмма, в общем виде описывающая процесс рассеяния света на свете.

Амплитуда рассеяния света на свете имеет вид

$$\begin{aligned}
& (-ie)\bar{u}(p')\widehat{\Gamma}_\rho(p', p)u(p) \equiv \langle \mu^-(p') | (ie)j_\rho(0) | \mu^-(p) \rangle = \\
& = \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{(-i)^3}{q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2 - k)^2} \frac{i}{((p' + q_1)^2 - m^2)} \times \\
& \times \frac{i}{((p' - q_1 - q_2)^2 - m^2)} (-ie)^3 \bar{u}(p') \gamma^\mu (\widehat{p}' - \widehat{q}_1 + m) \times \\
& \times \gamma^\nu (\widehat{p}' - \widehat{q}_1 - \widehat{q}_2 + m) \gamma^\lambda u(p) (ie)^4 \Pi_{\mu\nu\lambda\rho}(q_1, q_2, k - q_1 - q_2).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Используя свойства калибровочной инвариантности, амплитуду можно переписать [25]

в виде,

$$\begin{aligned}
& (-ie)\bar{u}(p')\widehat{\Gamma}_{\rho\sigma}(p', p)u(p) = \\
& = \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{(-i)^3}{q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2 - k)^2} \frac{i}{((p' + q_1)^2 - m^2)} \times \\
& \times \frac{i}{((p' - q_1 - q_2)^2 - m^2)} (-ie)^3 \bar{u}(p') \gamma^\mu (\widehat{p}' - \widehat{q}_1 + m) \times \\
& \times \gamma^\nu (\widehat{p}' - \widehat{q}_1 - \widehat{q}_2 + m) \gamma^\lambda u(p) (ie)^4 \frac{\partial}{\partial k_\rho} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, k - q_1 - q_2).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Аномальный магнитный момент мюона может быть извлечен используя проекцию на магнитный формфактор частицы со спином 1/2. Тогда АММ мюона может быть записан

в виде:

$$a_\mu^{\text{LbL}} = \frac{1}{48m_\mu} \text{Tr}((\widehat{p} + m_\mu)[\gamma^\rho, \gamma^\sigma](\widehat{p} + m_\mu)\Pi_{\rho\sigma}(p, p)),$$

где

$$\begin{aligned}
\Pi_{\rho\sigma}(p', p) = & -ie^6 \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2 - k)^2} \times \\
& \times \gamma^\mu \frac{\hat{p}' - \hat{q}_1 + m_\mu}{(p' - q_1)^2 - m_\mu^2} \gamma^\nu \frac{\hat{p} - \hat{q}_1 - \hat{q}_2 + m_\mu}{(p - q_1 - q_2)^2 - m_\mu^2} \gamma^\lambda \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial k^\rho} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, k - q_1 - q_2), \tag{2.4}
\end{aligned}$$

m_μ - масса мюона, $k_\mu = (p' - p)_\mu$ и необходимо рассматривать данное выражение в статическом пределе когда $k_\mu \rightarrow 0$. Производная от тензора рассеяния берется, чтобы удовлетворять свойствам калибровочной инвариантности $\Gamma_\rho(p, p') = k^\sigma \Gamma_{\rho\sigma}(p, p')$. Помимо этого можно использовать другой проектор, что так же предлагается в статье [40].

Процесс рассеяния света на свете можно логически и по топологии диаграмм разделить на два типа, о чем более конкретно будет говориться в следующей главе. Первый тип связан с диаграммами, в которых существует промежуточное мезонное состояние. Второй класс диаграмм – диаграммы по типу кваркового бокса, и в зависимости от модели могут появляться более сложные модификации подобных контактных диаграмм.

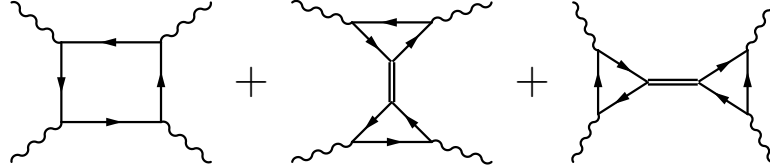


Рис. 2.2: Диаграммы, описывающие процесс света на свете с промежуточными мезонами и диаграмма по типу кварковый бокс.

2.1 Промежуточное мезонное состояние

Рассмотрим случай LbL процесса с промежуточным псевдоскалярным мезонным состоянием. В общем случае этот процесс можно представить при помощи трех диаграмм Фейнмана, изображенных на Рис.2.3.

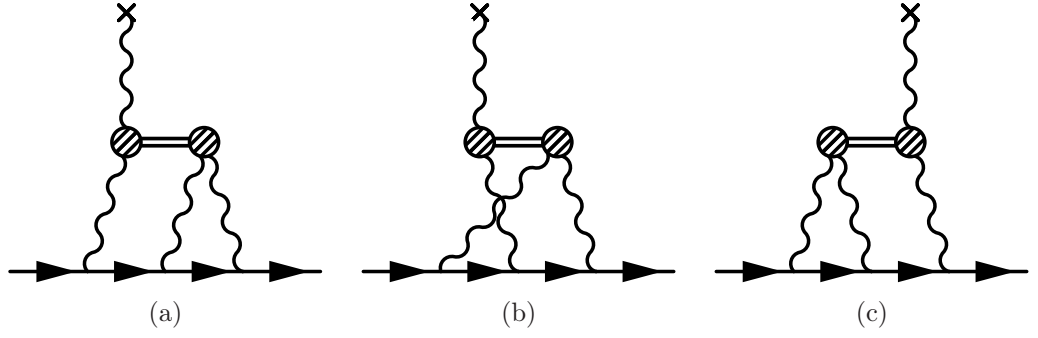


Рис. 2.3: Диаграммы, процесса рассеяния света на свете с промежуточными мезонными состояниями.

Тензор поляризации 4-го ранга для данного процесса с имеет вид [25]:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\mu\nu\lambda\rho}(q_1, q_2, q_3) = & \quad (2.5) \\
 & i \frac{\Delta^{\mu\nu}(q_1 + q_2, q_1, q_2) \Delta^{\lambda\rho}(q_1 + q_2, q_3, q_1 + q_2 + q_3)}{(q_1 + q_2)^2 - M^2} + \\
 & + i \frac{\Delta^{\mu\rho}(q_2 + q_3, q_1, q_1 + q_2 + q_3) \Delta^{\nu\lambda}(q_2 + q_3, q_2, q_3)}{(q_2 + q_3)^2 - M^2} + \\
 & + i \frac{\Delta^{\mu\lambda}(q_1 + q_3, q_1, q_3) \Delta^{\nu\rho}(q_1 + q_3, q_2, q_1 + q_2 + q_3)}{(q_1 + q_3)^2 - M^2},
 \end{aligned}$$

где $\Delta^{\mu\nu}(q_3, q_1, q_2)$ - вершинная функция перехода мезона в два фотона вне массовой поверхности, M — масса мезона.

Производная от поляризационного тензора (2.6) по импульсу внешнего фотона в статическом пределе имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial k^\rho} \Pi^{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, k - q_1 - q_2) = & \\
 & i \frac{\Delta^{\mu\nu}(q_1 + q_2, q_1, q_2)}{(q_1 + q_2)^2 - M^2} \frac{\partial}{\partial k^\rho} \Delta^{\lambda\sigma}(q_1 + q_2, -q_1 - q_2, k) \\
 & + i \frac{\Delta^{\nu\lambda}(-q_1, q_2, -q_1 - q_2)}{q_1^2 - M^2} \frac{\partial}{\partial k^\rho} \Delta^{\mu\sigma}(-q_1, q_1, k) \\
 & + i \frac{\Delta^{\mu\lambda}(-q_2, q_1, -q_1 - q_2)}{q_2^2 - M^2} \frac{\partial}{\partial k^\rho} \Delta^{\nu\sigma}(-q_2, q_2, k) + O(k). \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

$$(2.7)$$

Явный вид вершинных функций перехода мезона в два фотона и их производных будет приведен далее для случая псевдоскалярных и скалярных промежуточных состояний.

2.2 Промежуточное псевдоскалярное мезонное состояние.

В кварковой модели, рассматриваемой нами, имеется два канала с нейтральными частицами: псевдоскалярный (π, η, η') и скалярный (σ, a_0, f_0). Оба канала будут давать вклады в процесс рассеяния света на свете будут рассматриваться в данном разделе.

2.2.1 Амплитуда перехода псевдоскалярного состояния в два фотона.

Амплитуда перехода псевдоскалярного мезона в два фотона имеет вид:

$$A(\gamma^*(q_1, \epsilon_1) \gamma^*(q_2, \epsilon_2) \rightarrow P^*(p)) = -ie^2 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu q_1^\rho q_2^\sigma F_{P^* \gamma^* \gamma^*}(p^2; q_1^2, q_2^2),$$

где $q_{1,2}$ импульсы и $\epsilon_{1,2}$ – вектора поляризации фотонов, $p = q_1 + q_2$.

В общем виде переход мезона в два фотона в $N_\chi QM$ показан на Рис.2.4.

Для псевдоскалярного мезона вклад дают только две первых диаграммы. Это обусловлено тем, что в вершине перехода мезон-кварк-антикварк находится γ_5 - матрица. Вычисляемый шпур в амплитуды оставшихся диаграмм (d-g), связанный с кварковыми петлями, будет равен нулю.

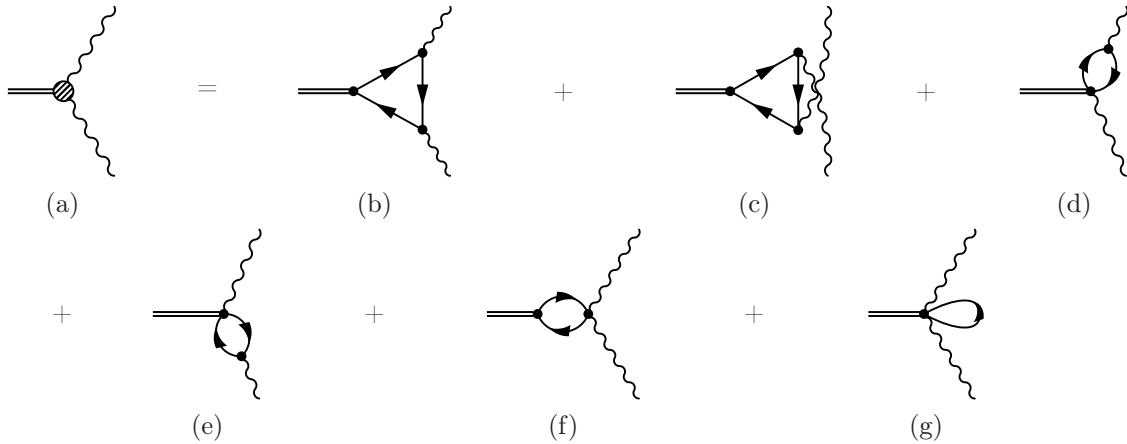


Рис. 2.4: Диаграммы, описывающие переход мезона в два фотона.

Для различных псевдоскалярных состояний, с учетом эффекта смешивания форм-

факторы перехода запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
F_{\pi_0^* \gamma^* \gamma^*} (p^2; q_1^2, q_2^2) &= g_\pi(p^2) F_u (p^2; q_1^2, q_2^2), \\
F_{\eta^* \gamma^* \gamma^*} (p^2; q_1^2, q_2^2) &= \frac{g_\eta(p^2)}{3\sqrt{3}} \times \left[(5F_u (p^2; q_1^2, q_2^2) - 2F_s (p^2; q_1^2, q_2^2)) \cos \theta(p^2) - \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{2} (5F_u (p^2; q_1^2, q_2^2) + F_s (p^2; q_1^2, q_2^2)) \sin \theta(p^2) \right], \\
F_{\eta'^* \gamma^* \gamma^*} (p^2; q_1^2, q_2^2) &= \frac{g_{\eta'}(p^2)}{3\sqrt{3}} \times \left[(5F_u (p^2; q_1^2, q_2^2) - 2F_s (p^2; q_1^2, q_2^2)) \sin \theta(p^2) + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{2} (5F_u (p^2; q_1^2, q_2^2) + F_s (p^2; q_1^2, q_2^2)) \cos \theta(p^2) \right],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_i (p^2; q_1^2, q_2^2) &= 8 \int \frac{d_E^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(k_1^2) f(k_2^2)}{D_i(k_1^2) D_i(k_2^2) D_i(k^2)} \times \\
&\quad \times \left[m_i(k^2) - m_i^{(1)}(k_1, k) J_1 - m_i^{(1)}(k_2, k) J_2 \right], \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= k^2 + \frac{q_2^2(kq_1)(k_1q_1) - q_1^2(kq_2)(k_1q_2)}{q_1^2 q_2^2 - (q_1 q_2)^2}, \\
J_2 &= k^2 + \frac{q_1^2(kq_2)(k_2q_2) - q_2^2(kq_1)(k_2q_1)}{q_1^2 q_2^2 - (q_1 q_2)^2}, \tag{2.9}
\end{aligned}$$

где $k_1 = k + q_1$, $k_2 = k - q_2$, $m_i^{(1)}(k, p) = (m_i(k^2) - m_i(p^2))/(k^2 - p^2)$ конечно-разностные производные первого порядка. Из (2.9) можно получить выражения для специальных кинематических условий, где для случая с одним реальным фотоном, функция играет важную роль для вычисления процесса света на свете.

$$F_i (q_1^2; q_1^2, 0) = 8 \int \frac{d_E^4 k}{(2\pi)^4} \frac{f(k_1^2) f(k^2)}{D_i(k_1^2) D_i^2(k^2)} \left[m_i(k^2) - m_i^{(1)}(k_1, k) \bar{J}_1 - m_i'(k^2) \bar{J}_2 \right], \tag{2.10}$$

$$\bar{J}_1 (k, q_1) = (kq_1) + \frac{2}{3} \left[k^2 + 2 \frac{(kq_1)^2}{q_1^2} \right], \quad \bar{J}_2 = \frac{4}{3} \left[k^2 - \frac{(kq_1)^2}{q_1^2} \right], \tag{2.11}$$

$$F_i (0; 0, 0) = \frac{1}{m_{d,i}} \left[\frac{1}{4\pi^2} - 8m_{c,i} \int \frac{d_E^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_i(k^2) - 2m_i'(k^2)k^2}{D_i^3(k^2)} \right], \tag{2.12}$$

В выражении (2.12) первое слагаемое обусловлено аксиальной аномалией, а второй член соответствует поправке за счет ненулевой токовой массы кварка, явно нарушающей киральную симметрию.

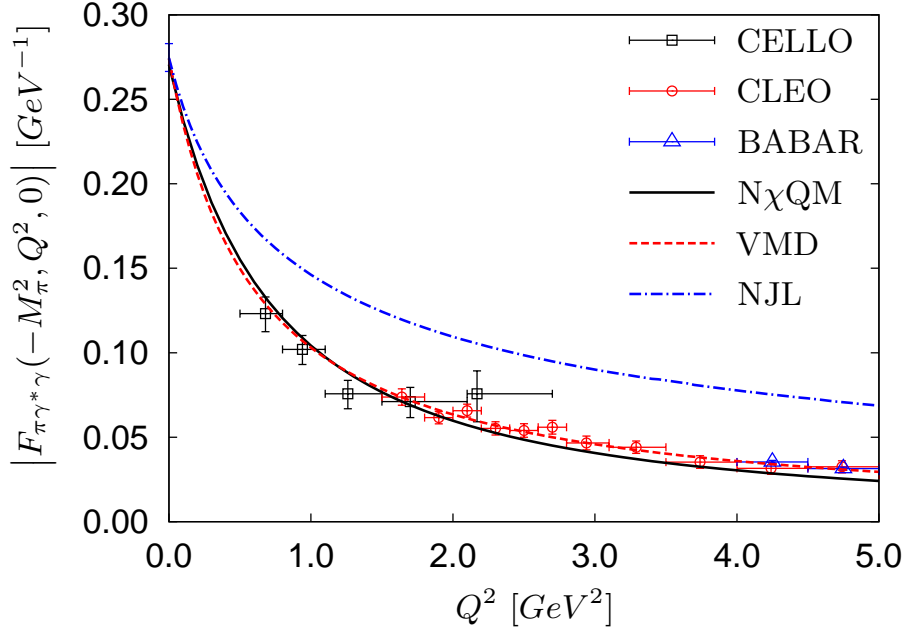


Рис. 2.5: Формфактор перехода $\gamma^* \gamma \rightarrow \pi^0$ в $N\chi QM$ (с набором параметров G_I), в LMD+V [17] и NJL [19] моделях в сравнении с данными экспериментов CELLO [41], CLEO [42] и BABAR [43].

2.2.2 Вычисление АММ мюона для процесса рассеяния света на свете с промежуточным псевдоскалярным мезонным состоянием

Вклад в АММ от процесса рассеяния света-на-свете с промежуточным псевдоскалярным мезоном, рисунок 2.8, можно представить в форме [40]

$$a_\mu^{LbyL,PS} = -e^6 \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 (q_1 + q_2)^2 ((p + q_1)^2 - m^2) ((p - q_2)^2 - m^2)} \times \quad (2.13)$$

$$\times \left(\frac{F_{\pi^0^* \gamma^* \gamma^*}(q_1^2, (q_1 + q_2)^2) F_{\pi^0^* \gamma^* \gamma^*}(q_2^2, 0)}{q_2^2 - M_\pi^2} T_1 + \frac{F_{\pi^0^* \gamma^* \gamma^*}(q_1^2, q_2^2) F_{\pi^0^* \gamma^* \gamma^*}((q_1 + q_2)^2, 0)}{(q_1 + q_2)^2 - M_\pi^2} T_2 \right). \quad (2.14)$$

Данное выражение можно упростить, используя процедуру усреднения по фазовому объему импульса мюона. В результате чего $a_\mu^{LbyL,PS}$ примет вид:

$$a_\mu^{LbL,PS} = -\frac{2\alpha^3}{3\pi^2} \int_0^\infty dq_1^2 \int_0^\infty dq_2^2 \int_{-1}^1 dt \sqrt{1-t^2} \frac{1}{q_3^2} \times \\ \times \sum_{a=\pi^0, \eta, \eta'} \left[2 \frac{F_{a^* \gamma^* \gamma^*}(q_2^2; q_1^2, q_3^2) F_{a^* \gamma^* \gamma}(q_2^2; q_2^2, 0)}{q_2^2 + M_a^2} I_1 \right. \\ \left. + \frac{F_{a^* \gamma^* \gamma^*}(q_3^2; q_1^2, q_2^2) F_{a^* \gamma^* \gamma}(q_3^2; q_3^2, 0)}{q_3^2 + M_a^2} I_2 \right], \quad (2.15)$$

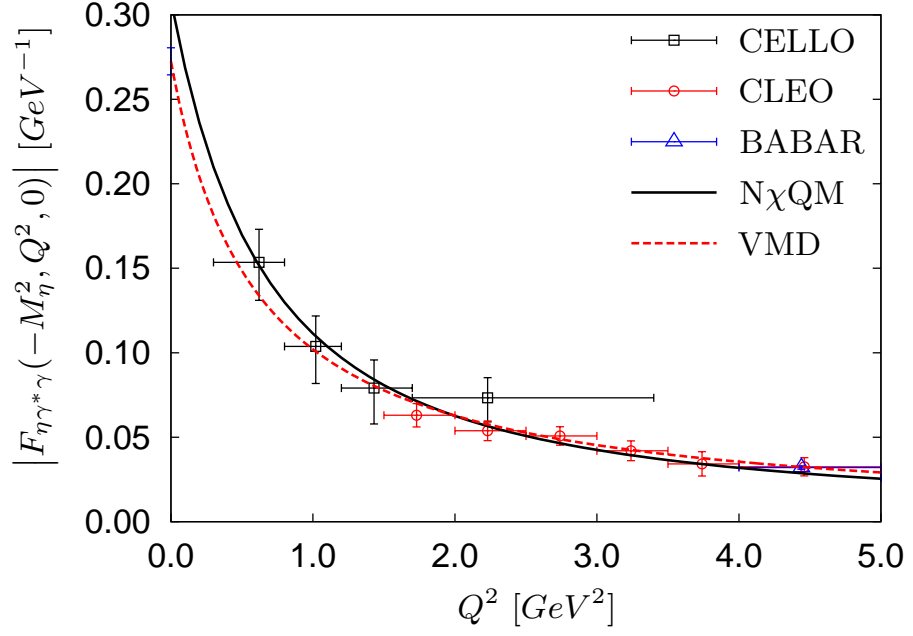


Рис. 2.6: Формафактор перехода $\gamma^*\gamma \rightarrow \eta$ в $N_\chi QM$ (с набором параметров G_I) и также поведение формафактора в вектор-мезон доминантной модели [17] в сравнении с данными экспериментов CELLO [41], CLEO [42] и BABAR [44].

где $q_3 = -(q_1 + q_2)$. Функции I_1 и I_2 есть

$$\begin{aligned}
I_1 = & q_1^2 \left[\left\langle \frac{1}{D_1} \right\rangle \left(\frac{(q_1 q_2)}{2} - q_2^2 (1 - t^2) \right) + \left\langle \frac{p q_2}{D_1} \right\rangle + \right. \\
& \left. + \left\langle \frac{1}{D_1 \cdot D_2} \right\rangle q_2^2 (1 - t^2) (q_2^2 - 2M_\mu^2) \right] - \frac{(q_1 q_2)}{2}, \tag{2.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & 2q_2^2 \left[\left\langle \frac{1}{D_2} \right\rangle (q_1^2 + (q_1 q_2)) - \left\langle \frac{p q_1}{D_2} \right\rangle - \right. \\
& \left. - \left\langle \frac{1}{D_1 \cdot D_2} \right\rangle q_1^2 (q_1^2 + (q_1 q_2) + M_\mu^2 (1 - t^2)) \right] + \tag{2.17} \\
& + \left\langle \frac{1}{D_1} \right\rangle q_1^2 (q_1 q_2) - (q_1 q_2),
\end{aligned}$$

В выражениях (2.16) и (2.18) в качестве обозначений была использована краткая запись

$$(D_1 = (p + q_1)^2 + M_\mu^2, D_2 = (p - q_2)^2 + M_\mu^2)$$

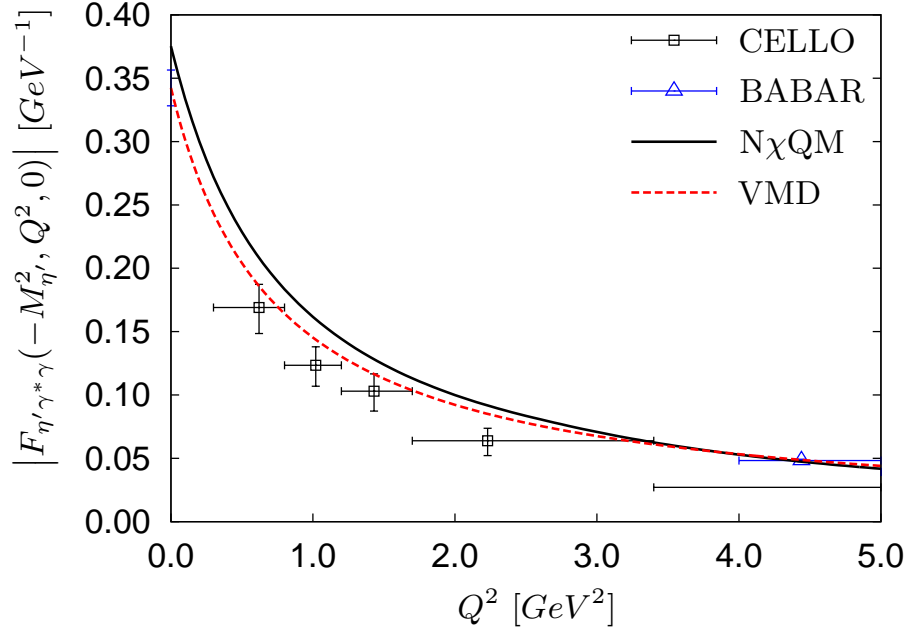


Рис. 2.7: Формфактор перехода $\gamma^* \gamma \rightarrow \eta'$ в $N_{\chi}QM$ (с набором параметров G_I) и также поведение форм-фактора в вектор-мезон доминантной модели [17] в сравнении с данными экспериментов CELLO [41] и BABAR [44].

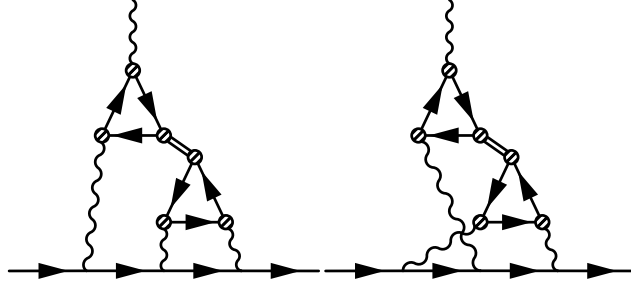


Рис. 2.8: Процесс рассеяния света на свете с промежуточным мезонным состоянием.

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{D_1} \right\rangle &= \frac{R_1 - 1}{2M_\mu^2}, & \left\langle \frac{1}{D_2} \right\rangle &= \frac{R_2 - 1}{2M_\mu^2}, \\
\left\langle \frac{1}{D_1 \cdot D_2} \right\rangle &= \frac{1}{M_\mu^2 |q_1| |q_2| x} \arctan \left[\frac{zx}{1 - zt} \right], \\
\left\langle \frac{pq_1}{D_2} \right\rangle &= -(q_1 q_2) \frac{(1 - R_2)^2}{8M_\mu^2} \\
\left\langle \frac{pq_2}{D_1} \right\rangle &= (q_1 q_2) \frac{(1 - R_1)^2}{8M_\mu^2} \\
t &= \frac{(q_1 q_2)}{|q_1| |q_2|}, & x &= \sqrt{1 - t^2}, & R_i &= \sqrt{1 + \frac{4M_\mu^2}{q_i^2}}, \\
z &= \frac{q_1 q_2}{4M_\mu^2} (1 - R_1) (1 - R_2)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где M_μ есть масса мюона ($p^2 = -M_\mu^2$).

Весьма важным представляется исследование вклада в АММ мюона от процесса LbL с промежуточным пионным состоянием в SU(2) версии нелокальной модели [8]. В изоспиновом пределе модель будет иметь только три параметра: токовая $m_{c,u}$ и динамическая $m_{d,u}$ массы кварков, а также параметр нелокальности Λ . В данном случае можно фиксировать два параметра, например токовую массу $m_{c,u}$ и параметр нелокальности Λ , используя массу пиона или ширину распада пиона и константу распада пиона в два фотона.¹ Масса пиона является хорошо известной величиной, неопределенность величины константы распада пиона в два фотона находится на уровне 3 %. Третий же параметр $m_{d,u}$ можно оставить свободным и рассмотреть зависимость вклада a_μ^{LbL,π^0} от величины данного параметра.

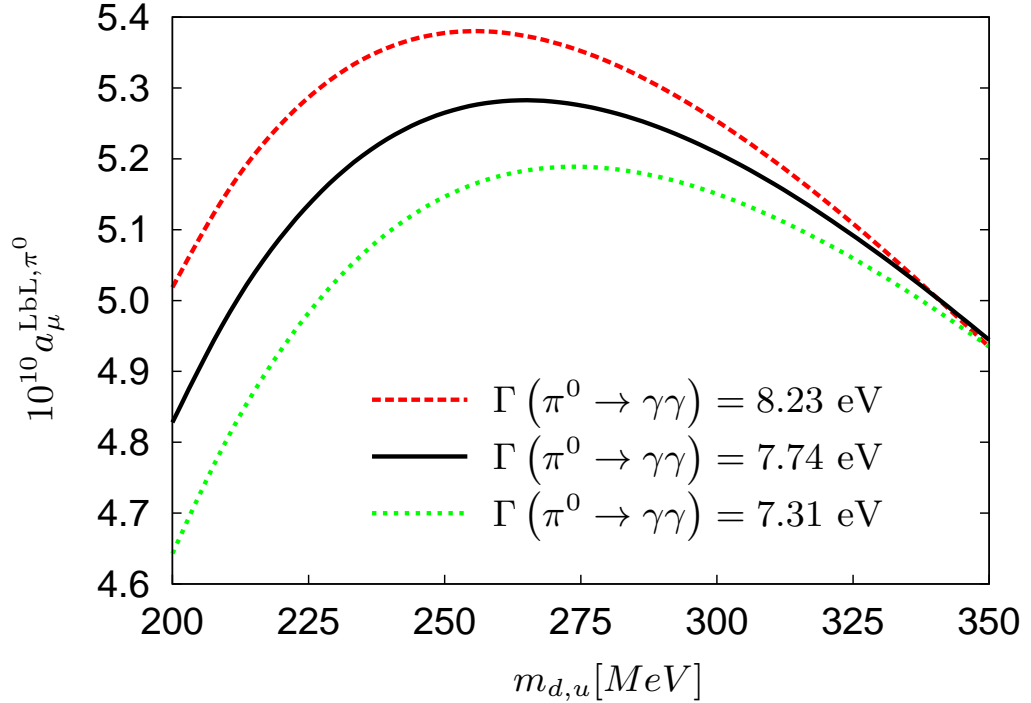


Рис. 2.9: Вклад в АММ мюона от процесса рассеяния света на свете с промежуточным пионом как функция от динамической массы кварка. Диапазон между двумя пунктирными линиями определяется из интервала ошибки измерения ширины распада пиона [45] в два фотона.

¹Часто свойства заряженных пионов, а именно масса и константа слабого распада, используются для фиксации параметров модели. Отличие между пространством фиксированных параметров на заряженный и на нейтральный пион обусловлено малыми поправками на изотопический инвариант, которые вводятся путем электромагнитного взаимодействия. Поэтому проще и правильнее будет рассматривать фиксирование параметров модели на свойства нейтрального пиона.

Динамическая масса выбирается нами в области физической массы 200 - 350 MeV. Другие параметры фитируются на физические константы, с использованием ошибки экспериментальной величины времени жизни нейтрального пиона [46]. Зависимость вклада как функция динамической массы изображена на графике Рис.2.12.

В результате наша оценка вклада от нейтрального пиона² $a_{\mu}^{\text{LbL},\pi^0} = (5.01 \pm 0.37) \cdot 10^{-10}$.

Результаты для нелокальной модели на группе симметрии $SU(3) \times SU(3)$ для различных параметризаций приведены в Таблице2.1.

set	π^0	η	η'	$\eta + \eta'$	$\pi^0 + \eta + \eta'$
G_I	5.05	0.55	0.27	0.82	5.87
G_{II}	5.05	0.59	0.48	1.08	6.13
G_{III}	5.05	0.53	0.18	0.71	5.76
G_{IV}	5.10	0.49	0.25	0.74	5.84

Таблица 2.1: Вклад псевдоскалярных мезонов в АММ мюона a_{μ}^{LbL} подсчитанный в рамках $N\chi\text{QM}$ для различных параметризаций. Все числа задаются с фактором 10^{-10} .

Важно отметить, что в $SU(3)$ модели вклад от нейтрального пиона лежит в диапазоне величины полученной в рамках $SU(2)$ модели. Вклады для η и η' получается меньше на порядок, чем вклад обусловленный нейтральным пионом. Это следовало ожидать, так как их массы намного больше массы пиона.

При определении центральной величины для η и η' мы усредняли полученные вклады. Диапазон ошибки задается как максимальное отклонение средней величины от максимальной и минимальной величины от среднего. Отклонение для вклада η - мезона от центральной величины кажется неестественно малым по сравнению с η' -мезоном, поэтому для него использовался фактор 60% полученный для диапазона η' вклада. Результат наших вычислений $a_{\mu}^{\text{LbL},\eta} = (0.54 \pm 0.32) \cdot 10^{-10}$ и $a_{\mu}^{\text{LbL},\eta'} = (0.30 \pm 0.18) \cdot 10^{-10}$.

В таблице 2.2 представлены результаты для псевдоскалярного вклада в АММ от LbL

² При изменении параметров модели пионный формфактор не просто перемасштабируется, но и меняет свою форму довольно сложным образом. В точке со значением массы $m_{d,u} = 350$ MeV линии поведения вклада имеют пересечение при различных параметризациях модели. С другой стороны, область низких энергий почти соответствует локальному пределу. В локальном случае радиус пиона ведет себя как $\langle r^2 \rangle = 1/2m_{d,u}^2$ [47]. В результате этого для небольших величин динамической массы формфактор быстро падает, что приводит к небольшому значению вклада в АММ $a_{\mu}^{\text{LbL},\pi^0}$.

процесса, полученные в различных теоретических подходах. Можно легко увидеть, что полученные результаты в рамках нашего подхода с учетом полной виртуальности промежуточного мезона дают систематически меньший вклад для каждого из псевдоскалярных легких мезонов. Этот эффект можно объяснить, рассматривая поведение формфактора перехода виртуального мезона в два фотона в специальной кинематике $F_{P^*\gamma^*\gamma}$, входящего в состав тензора 4-го порядка, описывающего процесс LbL с промежуточным мезонным состоянием (2.15). Если сравнить поведение этого формфактора с поведением в рамках других подходов (Рис.2.10.), то можно увидеть более сильное подавление вершинной функции при всех значениях импульса, в результате, значения вклада в АММ в рамках $N_\chi QM$ получаются меньше, чем в других подходах.

Model	π^0	η	η'	$\pi^0 + \eta + \eta'$
VMD [48]	5.74	1.34	1.19	8.27(0.64)
ENJL [77]	5.6			8.5(1.3)
LMD+V [17]	5.8(1.0)	1.3(0.1)	1.2(0.1)	8.3(1.2)
NJL [19]	8.18(1.65)	0.56(0.13)	0.80(0.17)	9.55(1.66)
(LMD+V)' [49]	7.97	1.8	1.8	11.6(1.0)
oLMDV [18]	7.2(1.2)	1.45(0.23)	1.25(0.2)	9.9(1.6)
$N_\chi QM$ [50]	6.5			
HM [54]	6.9	2.7	1.1	10.7
DIP [73]	6.54(0.25)			
DSE [24]	5.75(0.69)	1.36(0.30)	0.96(0.21)	8.07(1.20)
This work ($N_\chi QM$)	5.01(0.37)	0.54(0.32)	0.30(0.18)	5.85(0.87)

Таблица 2.2: Вклады в АММ мюона от процесса рассеяния света на свете с адронным обменом нейтральным псевдоскалярным каналом a_μ^{LbL} , полученные в различных моделях. Все числа имеют фактор равный 10^{-10} . Важно отметить факт то, что в работах [50, 55] и (LMD+L)' модели [49], численно проверены результаты и получено 7.97 вместо 7.65 указанного в оригинальной статье [49].

Для случая η и η' мезонов ситуация еще более интересная, так как в данном случае начинает играть роль зависимость угла смешивания для различных состояний мезонов и от их виртуальности. Это можно проиллюстрировать, если рассмотреть поведение вершинной функции $F_{P^*\gamma^*\gamma}(p^2; 0, 0)$ во времениподобной области $p^2 \leq 0$ и в пространственно-подобной области $p^2 \geq 0$, как это было сделано (Рис. 2.11) для нелокальной кварковой

модели и для модели векторной доминантности (VMD). Важно отметить, что первая область кинематики играет роль в описании распада псевдоскалярного мезона в два физических фотона $F_{P\gamma\gamma}(-M_M^2; 0, 0) = g_{P\gamma\gamma}$, в то время как вторая область является важной для вычисления вклада LbL в АММ мюона (2.15). Таким образом область $p^2 \leq 0$ на Рис. 2.11. соответствует распаду псевоскалярного состояния в два физических фотона, тогда как область $p^2 \geq 0$ соответствует форм-фактору, который дает вклад в АММ. В точке ноль эти форм-факторы совпадают. В VMD подобных моделях не наблюдается такой существенной зависимости от виртуальности мезона. Таким образом, в VMD вершинная функция при нулевой виртуальности соответствует вершинной функции в точке физической массы $F_{P\gamma\gamma}^{\text{VMD}}(p^2 = -M_{\eta,\eta'}^2; 0, 0) = F_{P\gamma\gamma}^{\text{VMD}}(0; 0, 0)$. Однако, для η и η' мезонов, которые тяжелее пиона, такая простая экстраполяция может себя не оправдывать.

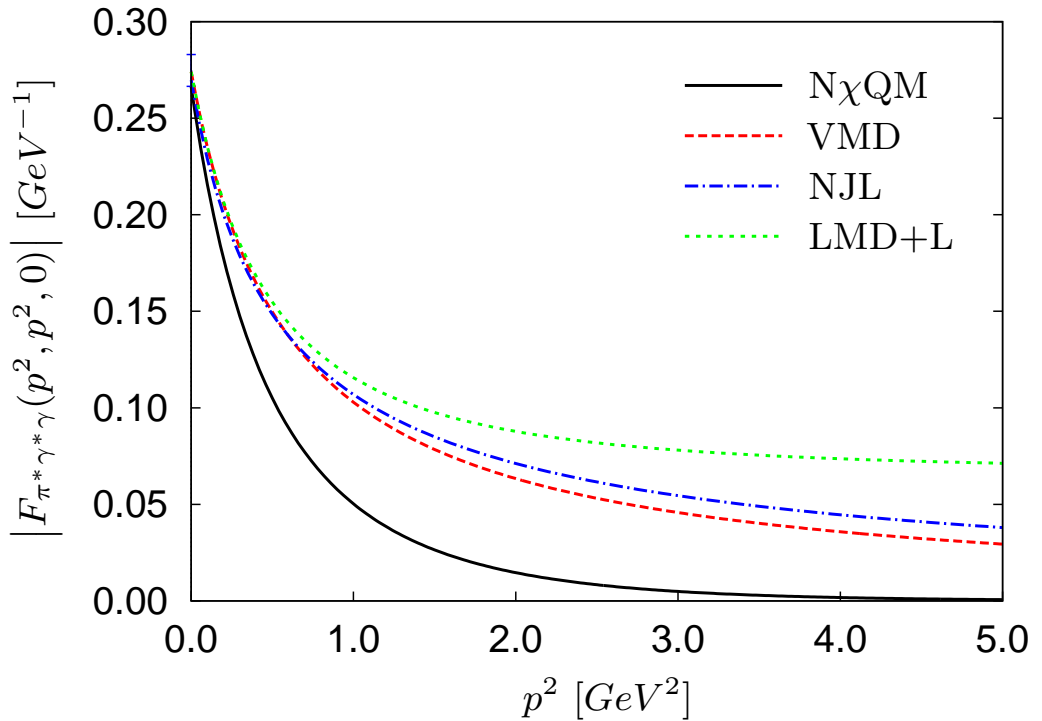


Рис. 2.10: Вершина перехода пиона в два фотона для случая специальной кинематики, когда пион и один из фотонов находятся вне массовой поверхности, в то время как второй фотон является реальным.

Сплошная линия соответствует $N\chi QM$ [23], прерывистая линия VMD [25], прерывистая с точками NJL [19] и oLMD+V модель [18] показана коротко-прерывистой линией.

В частности, в рамках нелокальной киральной кварковой модели видно существен-

ное отличие поведения вершинной функции в данных точках $F_{P\gamma\gamma}(p^2 = -M_{\eta,\eta'}^2; 0, 0) \gg F_{P\gamma\gamma}(0; 0, 0)$. Характерным масштабом для интегралов в АММ является масштаб массы мюона, в то время как для описания формфактора в VMD подходе характерным масштабом является масса ρ -мезона. Эти масштабы существенно отличаются. Поведения переходного форм-фактора существенно важно для вычисления АММ близи характерного масштаба.

Зависимость угла смешивания для конкретных состояний мезонов можно опустить при объяснении малого вклада для η и η' мезонов, так как возможно рассматривать вклад не от конкретных физических состояний мезонов η и η' , а от полей η_0 и η_8 , которые входят в нонет легких мезонов. Тогда механизм получения меньшей величины вклада для АММ для данных состояний будет таким же, как и для пиона, и систематически ниже, чем вклады, вычисленные в рамках других подходов.

2.3 Промежуточное скалярное мезонное состояние

В этом параграфе рассматривается вклад связанный с промежуточными легкими скалярными мезонами. В отличие от пионного вклада, данный вклад будет априори подавлен по массе.

2.3.1 Амплитуда перехода скалярного мезона в два фотона

Одним из важных элементов для вычисления LbL является процесс перехода скалярного мезона в пару фотонов, при произвольной виртуальности.

Полный набор диаграмм для данной амплитуды приведен на рисунке 2.4. В отличие от псевдоскалярного случая, ни одна из диаграмм не равна нулю при вычислении шпура по внутренней линии кварка. В общем виде данную амплитуду можно представить в виде

$$A(\gamma_1^* \gamma_2^* \rightarrow M^*) = e^2 \epsilon_1^\mu \epsilon_2^\nu \Delta^{\mu\nu}(p, q_1, q_2),$$

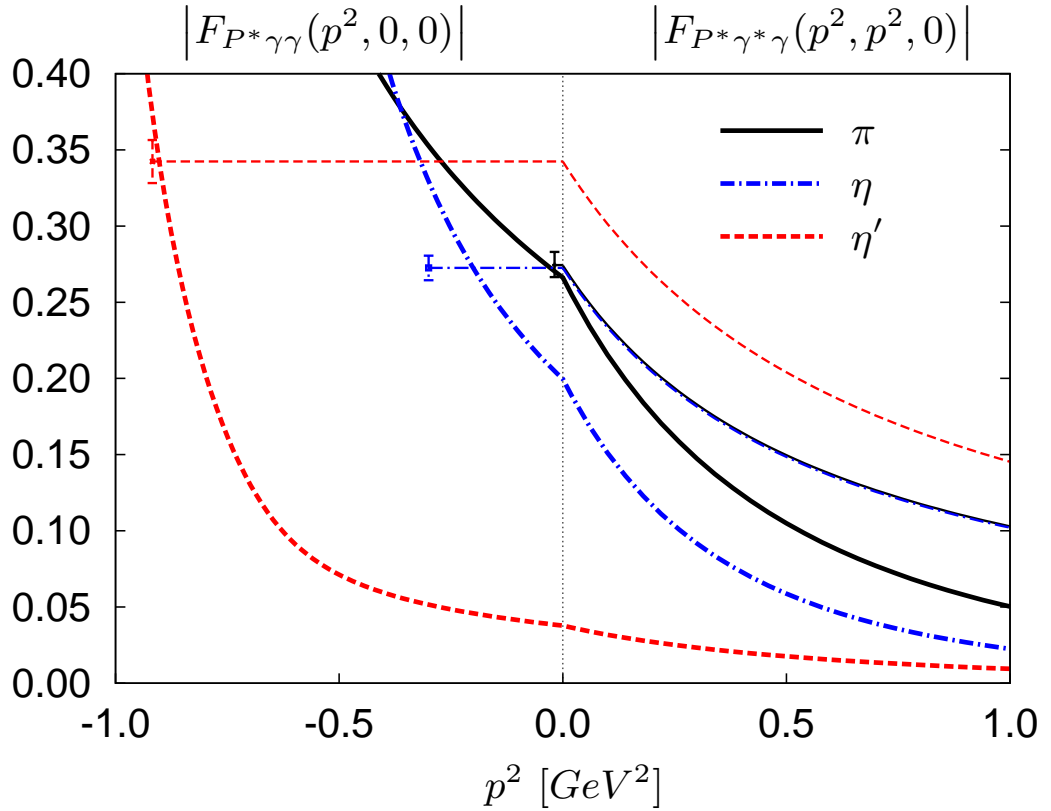


Рис. 2.11: График поведения вершинных функций $F_{P^* \gamma \gamma}(p^2; 0, 0)$ для π^0, η и η' во временно-подобной области и $F_{P^* \gamma^* \gamma}(p^2; p^2, 0)$ в пространственно-подобной области. Результаты N χ QM показан сплошной линией, VMD [25] - прерывистой. Точки с диапазоном ошибки соответствуют точкам распада мезона в два реальных фотона. Для VMD кривые для π^0 и η накладываются друг на друга.

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mu\nu}(p, q_1, q_2) = & -iN_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \times \text{Tr} \left(2\Gamma_{k_2, k_1}^M S(k_1) \Gamma_{k_1, k_3}^\mu S(k_3) \Gamma_{k_3, k_2}^\nu S(k_2) + \right. \\
& + \Gamma_{k_2, k_3, q_1}^{M; \mu} S(k_3) \Gamma_{k_3, k_2}^\nu S(k_2) + \Gamma_{k_3, k_1, q_2}^{M; \nu} S(k_1) \Gamma_{k_1, k_3}^\mu S(k_3) + \\
& \left. + \Gamma_{k_2, k_1}^M S(k_1) \Gamma_{k_1, k_2, q_1, q_2}^{\mu, \nu} + \Gamma_{k_3, k_3, q_1, q_2}^{M; \mu, \nu} S(k_3) \right), \tag{2.19}
\end{aligned}$$

где $q_{1,2}$ - это импульсы фотонов, а $\epsilon_{1,2}$ - вектора поляризации этих фотонов, импульс мезона равен сумме импульсов фотонов $p = q_1 + q_2$, импульсы кварков внутренней линии обозначается как $k_{1,2,3}$ ($k_1 = k + q_1$, $k_2 = k - q_2$, $k_3 = k$). Пропагаторы кварков записываются как $S(k_i)$, Γ_y^x это вершинные функции, явный вид которых подробно приведен в Приложении А.1. Первые два слагаемых на Рис2.4 соответствуют кварковым треугольным диаграммам, следующие соответствуют диаграммам, обусловленных нелокальным взаимодействием кварков с калибровочными полями.

Для различных скалярных мезонных состояний можно записать следующие состояния с учетом углов смешивания странных и нестранных компонент (см. также Приложении А.2.)

$$\begin{aligned}
\Delta_{a_0}^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) &= g_{a_0}(p^2) \delta_u^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2), \\
\Delta_{\sigma}^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) &= \frac{g_{\sigma}(p^2)}{3\sqrt{3}} \times \\
&\times \left[(5\delta_u^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) - 2\delta_s^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2)) \cos \theta_S(p^2) - \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{2} (5\delta_u^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) + \delta_s^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2)) \sin \theta_S(p^2) \right], \\
\Delta_{f_0}^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) &= \frac{g_{f_0}(p^2)}{3\sqrt{3}} \times \\
&\times \left[(5\delta_u^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) - 2\delta_s^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2)) \sin \theta_S(p^2) + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{2} (5\delta_u^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2) + \delta_s^{\mu\nu}(p^2; q_1^2, q_2^2)) \cos \theta_S(p^2) \right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

set	$M_{a_0(980)}$ [MeV]	M_{σ} [MeV]	$M_{f_0(980)}$ [MeV]	$g_{a_0\gamma\gamma}$ [GeV ⁻¹]	$g_{\sigma\gamma\gamma}$ [GeV ⁻¹]	$g_{f_0\gamma\gamma}$ [GeV ⁻¹]
G _I	796.4	426.6	> 1008	0.032	0.124	
G _{II}	761.4	427.6	> 1008	0.036	0.124	
G _{III}	812.4	426.2	> 1008	0.030	0.124	
G _{IV}	> 739.7	522.1	> 739.7		0.149	
exp	980 ±20	400–1200	980 ±10	0.087 +0.017 -0.018	0.13–1.7	0.086 ±0.011

Таблица 2.3: Массы и константы двухфотонных распадов скалярных мезонов, полученные в нелокальной кварковой модели для различных параметризаций.

Массы и двухфотонные константы распадов скалярных мезонов лишь качественно согласуются с экспериментальными данными. Это возможно связано с тем, что описание легких скалярных мезонов как чистых $\bar{q}q$ состояний не вполне реалистично и корректное описание их масс и свойств требует включения дополнительных компонент, например четырех-кварковых (см. например, [53]). Однако модель, использованная в расчетах, сформулирована в лидирующем порядке разложения по $1/N_c$ и наши расчеты в этом поряд-

ке полностью согласованы. Более того, скалярные мезоны в данном процессе участвуют только как промежуточные состояния, вдали от массовой поверхности.

Амплитуду перехода можно записать через ее проекции на калибровочно-инвариантные структуры

$$\Delta_S^{\mu\nu}(p, q_1, q_2) = A_S(p^2; q_1^2, q_2^2) P_A^{\mu\nu}(q_1, q_2) + B_S(p^2; q_1^2, q_2^2) P_B^{\mu\nu}(q_1, q_2), \quad (2.21)$$

где

$$P_A^{\mu\nu}(q_1, q_2) = (g^{\mu\nu}(q_1 q_2) - q_1^\nu q_2^\mu),$$

$$P_B^{\mu\nu}(q_1, q_2) = (q_1^2 q_2^\mu - (q_1 q_2) q_1^\mu) (q_2^2 q_1^\nu - (q_1 q_2) q_2^\nu),$$

and $p = q_1 + q_2$.

Отметим так же, что формфактор B_S имеет сингулярность в пределе, когда один из фотонов лежит на массовой поверхности, а второй имеет виртуальность (квадрат импульса) равную виртуальности мезона $p^2 \rightarrow q_1^2, q_2^2 \rightarrow 0$.

Воспользовавшись проекциями A_S, B_S , мы можем отдельно искать странные A_s, B_s и не странные компоненты A_u, B_u . Для любого кварка проекцию можно записать в виде

$$\begin{aligned} A_i(p^2; q_1^2, q_2^2) &= \frac{\delta_i^{\mu\nu}(p, q_1, q_2)}{2(q_1 \cdot q_2)} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(q_1 \cdot q_2) q_1^\nu q_2^\mu}{(q_1 \cdot q_2)^2 - q_1^2 q_2^2} \right], \\ B_i(p^2; q_1^2, q_2^2) &= -\frac{\delta_i^{\mu\nu}(p, q_1, q_2)}{2(q_1 \cdot q_2) ((q_1 \cdot q_2)^2 - q_1^2 q_2^2)} \times \\ &\quad \times \left[g^{\mu\nu} - 3 \frac{(q_1 \cdot q_2) q_1^\nu q_2^\mu}{(q_1 \cdot q_2)^2 - q_1^2 q_2^2} \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\delta_i^{\mu\nu}(p, q_1, q_2) = -2i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [J_{bc}^{\mu\nu} + J_{de}^{\mu\nu} + J_f^{\mu\nu} + J_g^{\mu\nu}].$$

Различные слагаемые в скобках, $J^{\mu\nu}$, соответствуют различным диаграммам на Рис2.4, с нижними индексами, указывающими на тип диаграммы рисунка.

Ниже для упрощения записи индекс, определяющий тип кварка будет опущен. Также вводятся определения

$$f_n \equiv f(k_n^2), \quad m_n \equiv m_i(k_n^2), \quad D_n \equiv D_i(k_n^2), \quad f_{nm}^{(1)} \equiv f^{(1)}(k_n, k_m),$$

$$m_{ln}^{(1)} \equiv m^{(1)}(k_n, k_m), \quad f_{nml}^{(2)} \equiv f^{(2)}(k_n, k_m, k_l).$$

Первое слагаемое имеет вид

$$J_{bc}^{\mu\nu} = \frac{f_1 f_2}{D_1 D_2 D_3} \left[V_1^{\mu\nu} + m_{23}^{(1)} m_{13}^{(1)} (k_2 + k_3)^\nu (k_1 + k_3)^\mu V_4 - \right. \\ \left. - m_{23}^{(1)} (k_2 + k_3)^\nu V_2^\mu - m_{13}^{(1)} (k_1 + k_3)^\mu V_3^\nu \right], \quad (2.23)$$

где

$$V_1^{\mu\nu} = m_1 [k_2^\nu k_3^\mu + k_2^\mu k_3^\nu] + m_3 [k_2^\nu k_1^\mu - k_2^\mu k_1^\nu] + \\ + m_2 [k_3^\nu k_1^\mu + k_3^\mu k_1^\nu] + g^{\mu\nu} [m_1 m_3 m_2 - m_1 (k_2 k_3) + \\ + m_3 (k_2 k_1) - m_2 (k_3 k_1)],$$

$$V_2^\mu = k_1^\mu [m_2 m_3 + (k_2 k_3)] + k_2^\mu [m_1 m_3 - (k_1 k_3)] + \\ + k_3^\mu [m_1 m_2 + (k_1 k_2)],$$

$$V_3^\nu = k_1^\nu [m_2 m_3 - (k_2 k_3)] + k_2^\nu [m_1 m_3 + (k_1 k_3)] + \\ + k_3^\nu [m_1 m_2 + (k_1 k_2)],$$

$$V_4 = m_1 m_2 m_3 + m_1 (k_2 k_3) + m_3 (k_1 k_2) + m_2 (k_1 k_3),$$

остальные слагаемые есть:

$$\begin{aligned}
J_{\text{de}}^{\mu\nu} &= \frac{f_2}{D_2 D_3} f_{13}^{(1)} (k_1 + k_3)^\mu \times \\
&\times \left(m_2 k_3^\nu + m_3 k_2^\nu - m_{32}^{(1)} (k_2 + k_3)^\nu ((k_3 k_2) + m_3 m_2) \right) + \\
&+ \frac{f_1}{D_1 D_3} f_{23}^{(1)} (k_2 + k_3)^\nu \times \\
&\times \left(m_3 k_1^\mu + m_1 k_3^\mu - m_{13}^{(1)} (k_1 + k_3)^\mu ((k_3 k_1) + m_3 m_1) \right),
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
J_{\text{f}}^{\mu\nu} &= \frac{f_1 f_2}{D_1 D_2} ((k_1 k_2) + m_1 m_2) m_d \left[(f_1 + f_2) g^{\mu\nu} f_{12}^{(1)} + \right. \\
&\left. + (k_1 + k_3)^\mu (k_2 + k_3)^\nu \left((f_1 + f_2) (f_{231}^{(2)} + f_{132}^{(2)}) - f_{13}^{(1)} f_{23}^{(1)} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\text{g}}^{\mu\nu} &= -\frac{f_2 m_2}{D_2} [g^{\mu\nu} f_{12}^{(1)} + (k_1 + k_3)^\mu (k_2 + k_3)^\nu f_{231}^{(2)}] - \\
&- \frac{f_1 m_1}{D_1} [g^{\mu\nu} f_{12}^{(1)} + (k_2 + k_3)^\nu (k_1 + k_3)^\mu f_{132}^{(2)}] + \\
&+ \frac{f_3 m_3}{D_3} f_{13}^{(1)} f_{23}^{(1)} (2k_1 + k_3)^\mu (2k_2 + k_3)^\nu.
\end{aligned}$$

2.3.2 Локальный предел для амплитуды перехода скалярного мезона в два фотона

В локальном пределе модели с конституентной массой кварка m_i , остаются только треугольные диаграммы Рис. 2.4b-с, которые можно представить следующим выражением

$$\begin{aligned}
\delta_{\text{loc};i}^{\mu\nu}(p, q_1, q_2) &= m_i g^{\mu\nu} I_{\text{g}}(m_i^2) + A_{\text{loc};i}(p^2; q_1^2, q_2^2) \times \\
&\times P_A^{\mu\nu}(q_1, q_2) + B_{\text{loc};i}(p^2; q_1^2, q_2^2) P_B^{\mu\nu}(q_1, q_2),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

где $I_{\text{g}}(m_i^2)$ есть калибровочно-неинвариантное слагаемое (константа)

$$I_g(m_i^2) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{m_i^2 - X}{m_i^2 - X} = \frac{1}{4\pi^2}, \quad (2.26)$$

$$X = x_1(1 - x_1 - x_2)q_2^2 + x_2(1 - x_1 - x_2)q_1^2 + x_1x_2p^2,$$

которое исчезает после применения регуляризации Паули-Вилларса, т.е. $I_g(m_i^2) - I_g(\Lambda_{\text{PV}}^2) = 0$, и тогда формфакторы будут равны

$$\begin{aligned} A_{\text{loc};i}(p^2; q_1^2, q_2^2) &= \frac{m_i}{4(q_1q_2)\pi^2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \times \\ &\times \frac{4X - p^2 + q_2^2(1 - 2x_1) + q_1^2(1 - 2x_2)}{m_i^2 - X}, \\ B_{\text{loc};i}(p^2; q_1^2, q_2^2) &= \frac{m_i}{(q_1q_2)\pi^2} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \frac{x_2(1 - 2x_2)}{q_2^2(m_i^2 - X)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Важно отметить, что взятии локального предела $\Lambda \rightarrow \infty$ в нелокальной модели (2.22) калибровочно неинвариантные слагаемые исчезают и дополнительная регуляризация не требуется.

В случае рассмотрения специальной кинематики, когда один из фотонов реален, формфактор ведет себя как

$$\begin{aligned} A_{\text{loc};i}(p^2; p^2, 0) &= -\frac{m_i}{\pi^2} \int_0^1 dx \frac{2m_i^2 - p^2(1-x)x(2 - (x - (1-x))^2)}{(m_i^2 - x(1-x)p^2)^2}, \\ B'_{\text{loc};i}(p^2; p^2, 0) &= 2\frac{m_i}{p^2\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{m_i^2 - x(1-x)p^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.3.3 Вклад от процесса рассеяния света на свете с промежуточным скалярным мезонным состоянием в АММ мюона.

Для вычисления вклада в АММ мюона необходимо взять производную от треугольной функции в соответствии с формулой (2.6).

В случае взятия производной, треугольная функция $\Delta^{\mu\nu}$ перепишется как

$$\Delta_S^{\mu\nu}(q_1 + q_2, q_1, q_2) = g^{\mu\nu}T_5 + q_1^\mu q_1^\nu T_1 + q_1^\mu q_2^\nu T_2 + q_2^\mu q_1^\nu T_3 + q_2^\mu q_2^\nu T_4 \quad (2.29)$$

Где T_i – функции трех кинематических инвариантов : $(q_1 + q_2)^2$, q_1^2 , q_2^2 . Для взятия производной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k^\rho} \Delta_S^{\mu\sigma}(k - q_1, q_1, -k) &= g^{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial k^\rho} T_5 + q_1^\mu q_1^\sigma \frac{\partial}{\partial k^\rho} T_1 + q_1^\mu \left(-g^{\rho\sigma} T_2 + (-k)^\sigma \frac{\partial}{\partial k^\rho} T_2 \right) \\ &+ q_1^\sigma \left(-g^{\mu\rho} T_3 + (-k)^\mu \frac{\partial}{\partial k^\rho} T_3 \right) + \left(g^{\mu\rho} k^\sigma T_4 + g^{\sigma\rho} k^\mu T_4 + k^\mu k^\sigma \frac{\partial}{\partial k^\rho} T_4 \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Производная от T_i имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k^\rho} T_i((k - q_1)^2, q_1^2, (-k)^2) &= \left(\frac{\partial}{\partial k^\rho} (k - q_1)^2 \right) \frac{\partial}{\partial((k - q_1)^2)} T_i((k - q_1)^2, q_1^2, (-k)^2) + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial k^\rho} q_1^2 \right) \frac{\partial}{\partial(q_1^2)} T_i((k - q_1)^2, q_1^2, (-k)^2) + \left(\frac{\partial}{\partial k^\rho} (-k)^2 \right) \frac{\partial}{\partial((-k)^2)} T_i((k - q_1)^2, q_1^2, (-k)^2) = \\ &2(k - q_1)^\rho \frac{\partial}{\partial((k - q_1)^2)} T_i((k - q_1)^2, q_1^2, (-k)^2) + 2k^\rho \frac{\partial}{\partial((-k)^2)} T_i((k - q_1)^2, q_1^2, (-k)^2). \end{aligned} \quad (2.31)$$

В результате получаем:

$$\frac{\partial}{\partial k^\rho} \Delta_S^{\mu\sigma}(k - q_1, q_1, -k) = (g^{\mu\sigma} q_1^\rho - q_1^\sigma g^{\mu\rho}) \mathcal{A}_S(q_1^2, q_1^2, 0) + O(k). \quad (2.32)$$

В результате для численного вычисления мы получаем уже более простой двух-петлевой интеграл для a_μ^{LbL} , содержащий комбинации формфакторов помноженные на полиномы зависящие от импульса. Данные полиномы приведены в Приложении А.3., где было использовано то же усреднение по импульсу мюона [40], что и в псевдоскалярном случае.

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int d\Omega(\hat{p}) \dots \quad (2.33)$$

После усреднения выражение для LbL вклада в АММ мюона со скалярным резонансом можно записать в виде интеграла:

$$\begin{aligned}
a_{\mu}^{\text{LbL},S} &= -\frac{2\alpha^3}{3\pi^2} \int_0^{\infty} dQ_1^2 \int_0^{\infty} dQ_2^2 \int_{-1}^1 dt \sqrt{1-t^2} \times \\
&\times \frac{1}{Q_3^2} \sum_M \left[2 \frac{\mathcal{N}_1^S(Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2)}{Q_2^2 + M_S^2} + \frac{\mathcal{N}_2^S(Q_1^2, Q_3^2, Q_2^2)}{(Q_3^2 + M_S^2)} \right], \\
\mathcal{N}_{1,2}^S(Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2) &= A_{S^*\gamma^*\gamma^*}(Q_2^2; Q_2^2, 0) \times \\
&\times \left(A_{S^*\gamma^*\gamma^*}(Q_2^2; Q_1^2, Q_3^2) T_{S_{1,2}}^{\text{AA}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} B_{S^*\gamma^*\gamma^*}(Q_2^2; Q_1^2, Q_3^2) T_{S_{1,2}}^{\text{AB}} \right),
\end{aligned}$$

где $Q_3 = -(Q_1 + Q_2)$, $t = (Q_1 Q_2) / (|Q_1| |Q_2|)$. Функции Ts выписаны в Приложении А.3.

Далее можно провести подсчеты, используя численное интегрирование с параметрами модели, которые были применены при расчетах псевдоскалярного вклада. Результаты приведены в Таблице.2.4

set	$a_0(980)$	σ	$f_0(980)$	S	$\pi^0 + \sigma$	PS+S
G _I	0.0064	0.100	0.0035	0.110	5.15	5.98
G _{II}	0.0079	0.100	0.0038	0.110	5.15	6.24
G _{III}	0.0058	0.100	0.0034	0.109	5.15	5.87
G _{IV}	0.0060	0.115	0.0038	0.126	5.25	5.97

Таблица 2.4: Вклад скалярных и псевдоскалярных мезонов в АММ мюона АММ a_{μ}^{LbL} для различных параметров модели [32]. Все числа имеют фактор равный 10^{-10} .

2.3.4 SU(2) - случай параметризации модели. Локальный предел.

Для скалярного мезона, как и для случая псевдоскалярного, также удобно рассмотреть результаты в рамках SU(2) модели и оценить зависимость вклада от сигма мезона от динамической массы кварка.

Кроме этого, интересно оценить величину вклада от нелокальности модели, что можно сделать в рамках SU(2)×SU(2) модели с дополнительной Паули-Вилларса регуляризацией. Для этого можно ввести дополнительный параметр x , который бы характеризовал степень нелокальности формфактора.

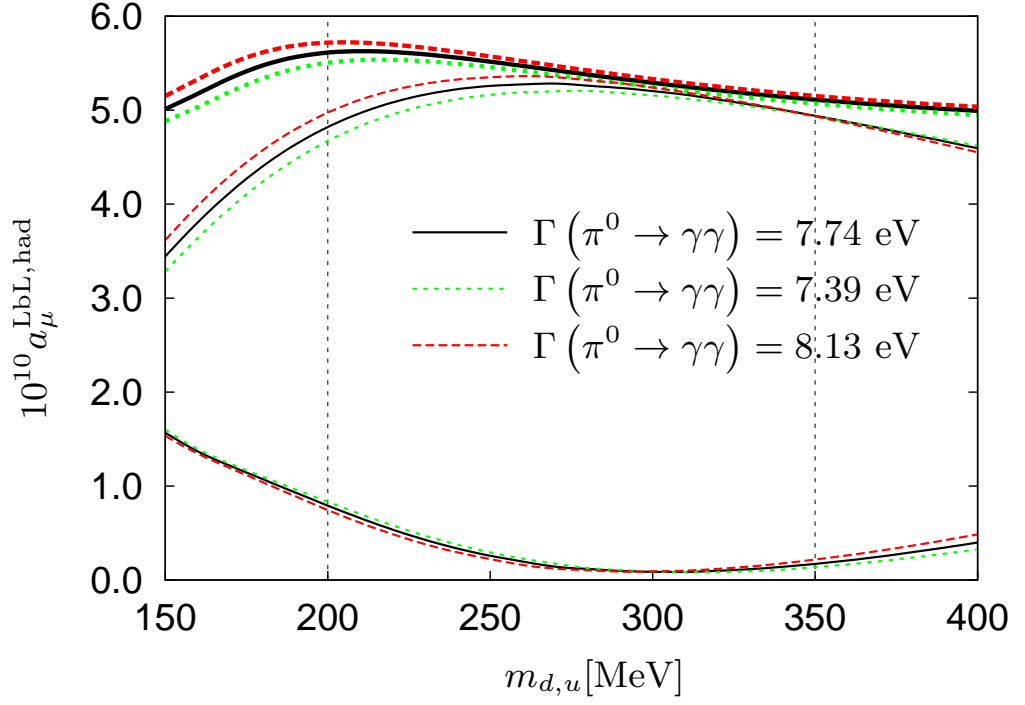


Рис. 2.12: Вклад в АММ мюона от процесса рассеяния света на свете с промежуточным пионным и сигма σ состоянием, как функция от динамической массы кварка. Нижняя кривая соответствует вкладу от сигма σ мезона, по середине лежит кривая от вклада π^0 мезона и верхняя линия соответствует суммарному их вкладу. Диапазон ошибки этих кривых задается разрывной и точечной линиями, которые соответствуют вкладам при различных величинах экспериментально измеренной величины ширины пиона. Вертикальные линии задают допустимый физический интервал динамической массы. Значения вклада найденный при во всем допустимом диапазоне задают величину неопределенности найденного нами вклада a_{μ}^{LbL} .

Рассмотрим две константы модели, которые между собой будут связаны параметром x

1. Параметр нелокальной модели Λ .
2. Параметр регуляризации интеграла по кварковой петле Λ_q .

Тогда случай локальной модели соответствует тому что

$$\Lambda \rightarrow \infty, \quad \Lambda_q = \Lambda_q^{\text{fit}},$$

Случай же нелокальной модели будет соответствовать набору параметров

$$\Lambda = \Lambda_q^{\text{fit}}, \quad \Lambda_q = \infty.$$

Для определенности сравним локальную модель³ [51] [52] с нелокальной моделью⁴ [56].

Величина кваркового конденсата в этих моделях отличается менее чем на 0.5%.

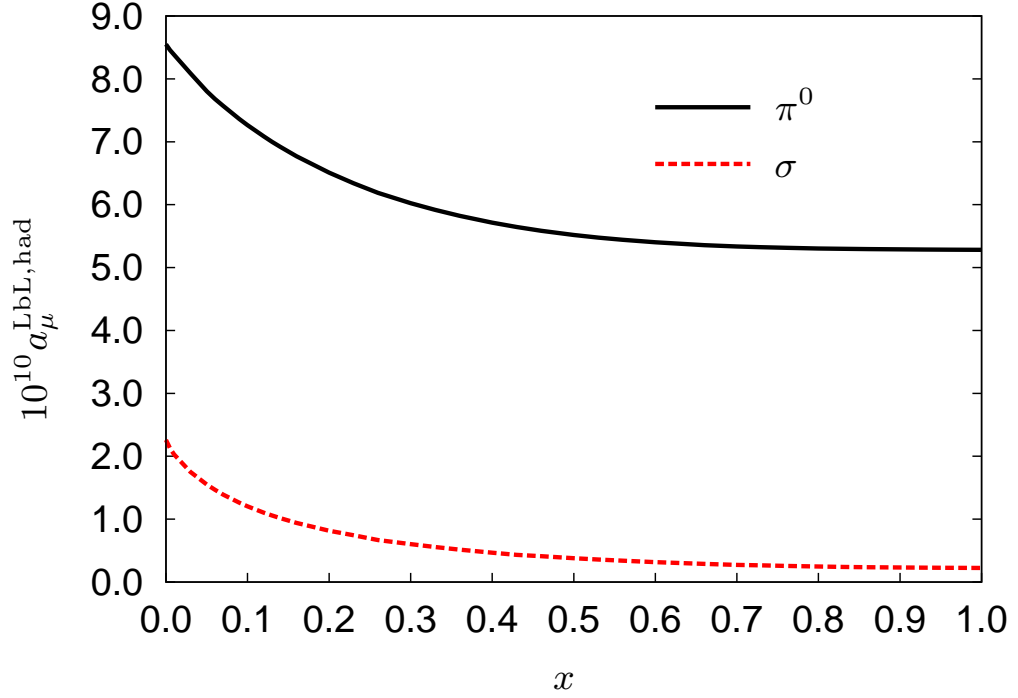


Рис. 2.13: Вклад в АММ мюона от процесса рассеяния света на свете для обмена пионом и σ -мезоном в нелокальной кварковой модели с дополнительной регуляризацией. Ноль величины x соответствует локальной NJL модели, а $x = 1$ приводит к нелокальной модели без дополнительной регуляризации.

Результат приведен на Рис 2.13, в зависимости от параметра нелокальности x . Для нулевого x соответствует локальной Намбу-Иона–Лазинио (NJL) модели, нелокальной модели соответствует параметр x равный единице. Между этими двумя положениями параметр регуляризации меняется как $\Lambda_q = \Lambda_q^{NJL}/(1-x)$, динамическая масса кварка меняется линейно и токовая масса с параметром нелокальности пересчитываются, исходя из изменений модели с x параметром и с фитированием модели на массу пиона и линейно меняющесся значение кваркового конденсата.

В результате виден рост вклада при переходе от нелокальной модели в локальную. Величина вклада АММ мюона растет от $5.3 \cdot 10^{-10}$ в нелокальной модели до $8.5 \cdot 10^{-10}$ в случае локальной модели. Более драматичная ситуация наблюдается для вклада от σ -

³ $m_c^{NJL} = 5.69$ МэВ, $m_d^{NJL} = 23.9$ МэВ, $\Lambda_q^{NJL} = 800$ МэВ.

⁴ $m_c^{N\chi QM} = 5.45$ МэВ, $m_d^{N\chi QM} = 255.8$ МэВ, $\Lambda_q^{N\chi QM} = 8902.4$ МэВ.

мезона. В локальном пределе вклад в 10 раз больше, чем в случае нелокального предела ($2.2 \cdot 10^{-10}$ вместо $0.22 \cdot 10^{-10}$).

2.4 Выводы

Учет полной кинематической зависимости вершин от виртуальности промежуточного мезона показал, что результаты вклада в АММ мюона получаются систематически ниже, чем других работах. В случае, если отбросить зависимость от виртуальности пиона, величина вклада увеличивается на 20 - 30%. Для η и η' мезонов разница в этом случае составляет фактор – три [23]. Полный вклад с учетом кинематической зависимости форм-факторов перехода псевдоскалярного мезона в пару фотонов составил

$$a_{\mu}^{LbL,PS} = (5.85 \pm 0.87) \cdot 10^{-10},$$

что отличается в 1.5 раза от результатов, полученных ранее в других подходах.

Вклад скалярных легких мезонов в рамках модели является положительным и частично стабилизирует поведение псевдоскалярного вклада. Полный вклад от процесса LbL с промежуточными скалярными и псевдоскалярными резонансами [58] оценивается как

$$a_{\mu}^{LbL,S+PS} = (6.25 \pm 0.83) \cdot 10^{-10}$$

Глава 3

Рассеяние света на свете II. Случай КОНТАКТНЫХ ДИАГРАММ.

В предыдущей главе были рассмотрены вклады с промежуточными псевдоскалярными и скалярными состояниями. В лидирующем порядке разложения по $1/N_c$ необходимо также вычислить вклад от контактного (нерезонансного типа) диаграмм. В локальной модели данный вклад представляет собой кварковую петлю. В нелокальной модели дополнительно приходится учитывать вклады, возникающие от многофотонных вершин. Это связано с тем, что масса кварка в петле зависит от импульса. Только полный набор диаграмм является калибровочно инвариантным.

Также можно отметить однозначное соответствие бозонизованной и небозонизованной версиями модели. В бозонизованной версии модели существуют вклады типа кварковой петли и вклады с промежуточным мезонном. В небозонизованной модели существует бесконечное число диаграмм, которые начинаются с кварковой петли со вставками с четырех-кварковых вершин. Тем не менее, в лидирующем порядке по $1/N_c$ данное бесконечное количество обменов с дополнительными четырех-кварковым взаимодействием связано с амплитудой Бетэ–Солпитера для связанных состояний. В результате имеется полное соответствие между диаграммами бозонизованной и небозонизованной модели.

В следующем за лидирующем порядке по $1/N_c$ разложения появляются дополнительные диаграммы с участием мезонов, к примеру, пионная петля и двух-мезонный промежуточный обмен.

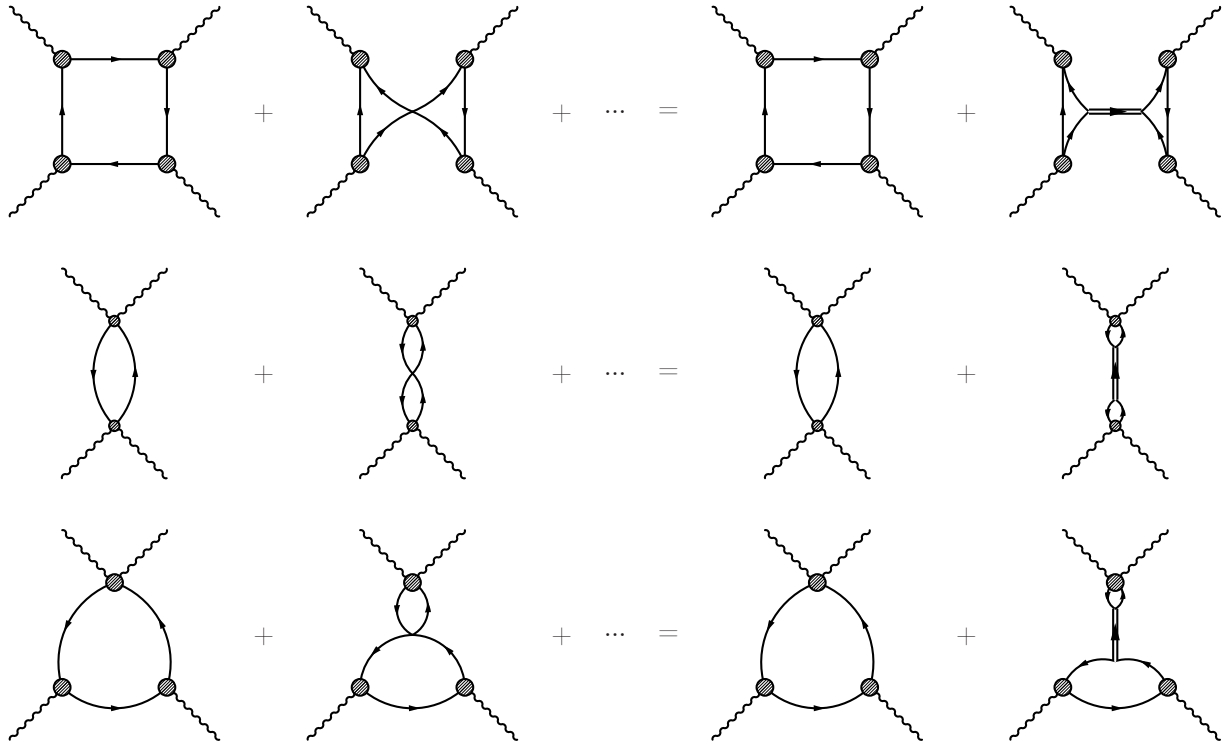


Рис. 3.1: Образование промежуточного мезонного состояния за счет 4-х кваркового взаимодействия в небозонизированной версии модели при учете полного набора диаграмм. Три вида диаграмм, которые возможны в рамках нелокальной модели с учетом скалярных и псевдоскалярных токов.

История изучения диаграммы типа бокс для рассеяния света на свете началась давно [59, 60], где был изучен данный подпроцесс с промежуточным лептоном, бегущим по петле. В случае кварка с постоянной массой кварка отличие состоит только в величине электрического заряда и в учете дополнительной цветовой степени свободы.

В случае рассмотрения данного процесса в нелокальной кварковой модели, как показано на рисунках, за счет нелокального взаимодействия можно отцепить бесконечный ряд диаграмм, за счет того, что они образуют промежуточное состояние. Но помимо этого часть диаграмм остаются нередуцированными, или же часть из них просто не имеет процедуры редуцирования. Это обусловлено наличием нелокальных типов вершинных функций взаимодействия с внешним калибровочным полем (см. Приложение А.1.).

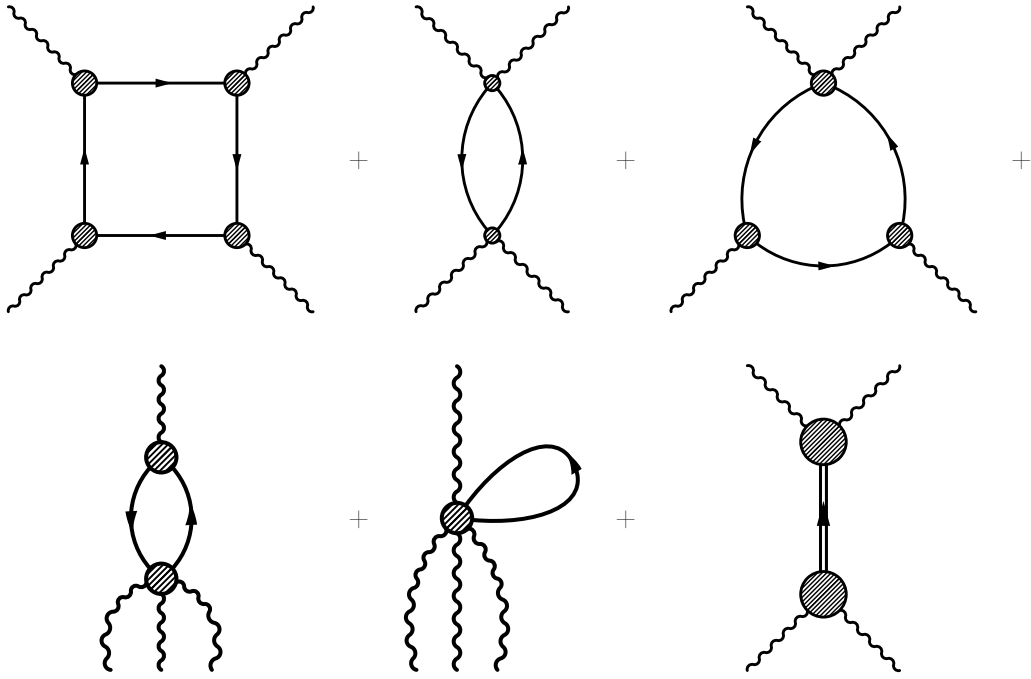


Рис. 3.2: Сумма всех диаграмм с учетом образования псевдоскалярных и скалярных промежуточных состояний.

Контактные диаграммы с нелокальными вершинами с тремя и четырьмя фотонами не участвуют в образовании промежуточных мезонных обменов, для них нет дополнительных диаграмм в случае рассмотрения модели со скалярными и псевдоскалярными токами.

3.1 Диаграмма кварковый бокс. Тензор рассеяния света на свете

Для начала рассмотрим общий случай тензора рассеяния света на свете для диаграммы типа бокс, $T^{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4)$. Для вычисления вклада в АММ мюона нам потребуется вычислить производную от этого тензора

$$J_{\sigma\rho}^{\mu\nu\lambda} = \left. \frac{\partial}{\partial \Delta_\rho} T_\sigma^{\mu\nu\lambda}(\Delta, k_1, k_2, k_3) \right|_{\Delta=0}.$$

Выражение для тензора рассеяния света на свете четвертого ранга выписано подробно в статье [60, 61] и содержит в себе 138 структур, которые, используя симметрии и калибровочную инвариантность, можно сократить до 17. Используя подобные схемы, можно записать общий вид для тензора $J_{\sigma\rho}^{\mu\nu\lambda}$, важного для вычисления АММ [20]:

$$\begin{aligned}
J_{\sigma\rho}^{\mu\nu\lambda}(123) &= \sum_{ijl} A^{ijl} k_i^\mu k_j^\nu k_l^\lambda + \sum_i B_{\rho\sigma}^i k_i^\mu g^{\nu\lambda} + \sum_i C^i (\bar{k}_i^\mu)_{\rho\sigma} g^{\nu\lambda} + \\
&+ \sum_{ijl} d^{ijl} (\bar{k}_i^\mu)_{\rho\sigma} k_j^\nu k_l^\lambda + \sum_i E^i(123) k_i^\mu [\nu\lambda]_{\rho\sigma} + \sum_j F_{\rho\sigma}^j(123) k_j^\nu g^{\mu\lambda} + \dots
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где принято соглашение об индексах суммирования:

$$i = 2, 3; \quad j = 1, 3; \quad l = 1, 2; \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$

$A, B, C, -F, \dots$ – коэффициентные функции при всевозможных тензорных структурах, для которых используются следующие обозначения после взятия производной по одному из импульсов:

$$(\bar{k}_i^\mu)_{\rho\sigma} = k_{i\rho} \delta_\sigma^\mu - k_{i\sigma} \delta_\rho^\mu; \quad [\nu\lambda]_{\rho\sigma} = \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\lambda - \delta_\rho^\lambda \delta_\sigma^\nu.$$

Используя симметрии и калибровочную инвариантность, можно сократить число данных структур, подробно данная схема выписана в статье [20].

Решение уравнения для вычисления амплитуд при калибровочных структурах требует довольно большого количества машинного времени, а также представляется возможным быть решенной аналитически из-за большого числа элементов в матрице размерности 17, которую надо многократно обращать, вычисляя обратную. По этой причине необходимо будет применить более простой метод вычислений, а именно, вычислять сразу же проекцию поляризованного тензора на АММ мюона, а не его компоненты.

3.2 Вычисление рассеяния света на свете для случая контактных диаграмм.

В рамках данной работы, вычисления проводятся в рамках нелокальной кварковой модели. В модели существует пять топологически различных фейнмановских диаграмм, которые дают вклад в процесс LbL в лидирующем порядке по $1/N_c$ (Рис. 2.4). Такой количество различных диаграмм связано с наличием многофотонных вершин взаимодействия

с кварками. Помимо этого надо необходимо помнить, что для каждой из диаграмм нужно учитывать все перекрестные слагаемые.

3.2.1 Локальный случай

Для иллюстрации рассмотрим вычисления диаграммы Рис. 2.4(а), в локальной модели, когда кварки имеют постоянную массу, а вершина взаимодействия кварков с фотоном просто γ_μ - матрица Дирака.

Для вычисления тензора $J_{\sigma\rho}^{\mu\nu\lambda}$ нужно в явном виде взять производную импульсу внешнего фотона

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, q_3, q_4) &= \\
&= 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\sigma S(k + \Delta) \gamma^\mu S(k + \Delta - q_2) \gamma^\nu S(k + q_1) \gamma^\lambda S(k) \right] \\
&+ 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu S(k - q_2) \gamma^\sigma S(k - q_2 + \Delta) \gamma^\nu S(k + q_1) \gamma^\lambda S(k) \right] \\
&+ 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu S(k - q_2) \gamma^\nu S(k - \Delta + q_1) \gamma^\sigma S(k + q_1) \gamma^\lambda S(k) \right];
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $S(k) = (\hat{k} + m)^{-1}$ — пропагатор кварка с постоянной массой. Множитель двойка учитывает то, что помимо трех этих диаграмм существуют такие же, в которых импульс кварка в петле будет направлен в обратную сторону. Выражение для производной от тензора поляризации имеет вид:

$$\begin{aligned}
J_{\sigma\rho}^{\mu\nu\lambda}(q_1, q_2) &= \\
&= 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\sigma \frac{\partial}{\partial \Delta_\rho} S(k + \Delta) \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial \Delta_\rho} S(k + \Delta - q_2) \gamma^\nu S(k + q_1) \gamma^\lambda S(k) \right] \\
&+ 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu S(k - q_2) \gamma^\sigma \frac{\partial}{\partial \Delta_\rho} S(k - q_2 + \Delta) \gamma^\nu S(k + q_1) \gamma^\lambda S(k) \right] \\
&+ 2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu S(k - q_2) \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial \Delta_\rho} S(k - \Delta + q_1) \gamma^\sigma S(k + q_1) \gamma^\lambda S(k) \right];
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \Delta_\rho} S(k + \Delta)|_{\Delta \rightarrow 0} = \gamma_\rho \frac{1}{k^2 - m^2} - 2k_\rho S(k) \frac{1}{k^2 - m^2}.$$

В случае рассмотрения всех диаграмм, выражения усложняются из-за наличия зависимости вершинных функций от импульса входящего фотона (Приложение А.1), по которому следует провести процедуру дифференцирования.

Запишем для основных диаграмм поляризационный оператор с учетом нелокальных вершин взаимодействия кварков с внешними калибровочными полями, от которых потом берется производная по импульсу внешнего фотона и проводится численное вычисление.

Для кваркового бокса в нелокальном случае модели получим выражение на вид аналогичное локальной модели

$$T^{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, q_3, \Delta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma^\sigma S(k + \Delta) \Gamma^\mu S(k + \Delta - q_2) \Gamma^\nu S(k + q_1) \Gamma^\lambda S(k) \right]. \quad (3.4)$$

где, в отличие от локальной модели, масса имеет зависимость от импульса входящего фотона. Следовательно:

$$S(k) = (\hat{k} + m(k))^{-1}; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Delta_\rho} S(k + \Delta)|_{\Delta \rightarrow 0} = \gamma_\rho \frac{1}{k^2 - m^2} - 2k_\rho S(k) \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{\partial m(k + \Delta)}{\partial \Delta_\rho} \frac{1}{k^2 - m^2}; \quad (3.6)$$

Количество диаграмм, учитывая перекрестные, для бокса составляет шесть. Контактных диаграмм с одной двух-фотонной вершиной – двенадцать штук:

$$T^{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, q_3, \Delta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma^\sigma S(k + \Delta) \Gamma^{\mu\nu} S(k + q_2) \Gamma^\lambda S(k) \right]. \quad (3.7)$$

С двумя двух-фотонными вершинами в количестве трех:

$$T^{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, q_3, \Delta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma^{\sigma\lambda} S(k + q_1 + q_2) \Gamma^{\mu\nu} S(k) \right]. \quad (3.8)$$

С одной трех и одно-фотонной вершиной – четыре штуки.

$$T^{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, q_3, \Delta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma^\sigma S(k + \Delta) \Gamma^{\mu\nu\lambda} S(k) \right]. \quad (3.9)$$

В одна с четырех -фотонной вершиной взаимодействия.

$$T^{\mu\nu\lambda\sigma}(q_1, q_2, q_3, \Delta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma^{\sigma\mu\nu\lambda} S(k) \right]. \quad (3.10)$$

Вершинные функции Γ^μ , $\Gamma^{\mu\nu}$, $\Gamma^{\mu\nu\lambda}$, $\Gamma^{\sigma\mu\nu\lambda}$ и зависимость их от импульсов выписаны в Приложении А.1

3.3 Результаты

Поскольку вычисления вклада в аномальный магнитный момент мюона от процесса рассеяния света на свете является достаточно сложным, то встает вопрос корректности вычисления. Для проверки полученных выражений, нами проверялась калибровочная инвариантность тензора поляризации и производной от него, а также соответствие известным локальным пределам для случая вкладов лептонов в электродинамике.

Для поляризационного поляризационного тензора можно аналитически показать, что свертка тензора поляризации с импульсами фотонов равна нулю. Этот результат верен для любого вида форм-фактора. Ввиду громоздкости данной проверки, она не приводится в данном тексте.

Для производной от поляризационного оператора проверка калибровочной инвариантности относительно виртуальности фотонных линий проводилась численно. Для этого в выражении для a_μ , проектор на АММ заменялся на продольный проектор. Конечное выражение было равно нулю на уровне точности машинного счета, т.е. для двойной точности, использовавшейся нами в расчетах, конечный ответ был на ~ 14 порядков меньше, чем отдельные вклады.

Следующий обязательной проверкой вычисления является воспроизведение в программе известных результатов для квантовой электродинамики. Например, в пределе $m_c + m_d \rightarrow m_l$, где m_l – масса лептона, и $\Lambda \rightarrow \infty$ должны воспроизводиться результаты квантовой электродинамики по вкладу лептона в АММ мюона с точностью до зарядового и

цветового фактора.

Напомним, что данные вклады имеют вид [40, 74]:

$$a_\mu(LbL, electron) = \left[\frac{2}{3}\pi^2 \ln \frac{m_\mu}{m_e} + \frac{59}{270}\pi^4 - 3\zeta(3) - \frac{10}{3}\pi^2 + \frac{2}{3} + O\left(\frac{m_e}{m_\mu} \ln \frac{m_\mu}{m_e}\right) \right] \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3; \quad (3.11)$$

$$a_\mu(LbL, muon) = \left[\frac{5}{6}\zeta(5) - \frac{5}{18}\pi^2\zeta(3) - \frac{41}{540}\pi^4 - \frac{5}{3}\pi^2 \ln^2(2) + \frac{2}{3} \ln^4(2) + 16a_4 - \frac{4}{3}\zeta(3) - 24\pi^2 \ln(2) + \frac{931}{54}\pi^2 + \frac{5}{9} \right] \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3; \quad (3.12)$$

$$a_\mu(LbL, tau) = \left[\left[\frac{3}{2}\zeta(3) - \frac{19}{16} \right] \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^2 + O\left(\frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} \ln^2\left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)\right) \right] \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3; \quad (3.13)$$

и численно равны

$$a_\mu(LbL, electron) = 20.94792489(16) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 = 2.62535102(2) \times 10^{-7}, \quad (3.14)$$

$$a_\mu(LbL, muon) \simeq 0.371005293 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 = 4.64971652 \times 10^{-9}, \quad (3.15)$$

$$a_\mu(LbL, tau) \simeq 0.00214283(69) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 = 2.68556(86) \times 10^{-11}. \quad (3.16)$$

Мы полностью воспроизводим данные числа, а также варьируя массы электрона и тау лептона относительно их физических значений воспроизводятся численно и коэффициенты разложения (3.14) и (3.16)

Таким образом можно утверждать, что:

- 1) нами записан полный калибровочно-инвариантный набор диаграмм.
- 2) данные диаграммы вычисляются в программе с сохранением калибровочной инвариантности.

3) в локальном пределе воспроизводятся известные результаты КЭД для вкладов лептонов с малыми и большими массами, т.е. процедура численного счета АММ с помощью численного интегрирования, работает верно, как для маленьких, так и для больших масс фермионов в петле.

Перед вычислением контактного вклада в нелокальной модели можно произвести характерные оценки в локальной модели.

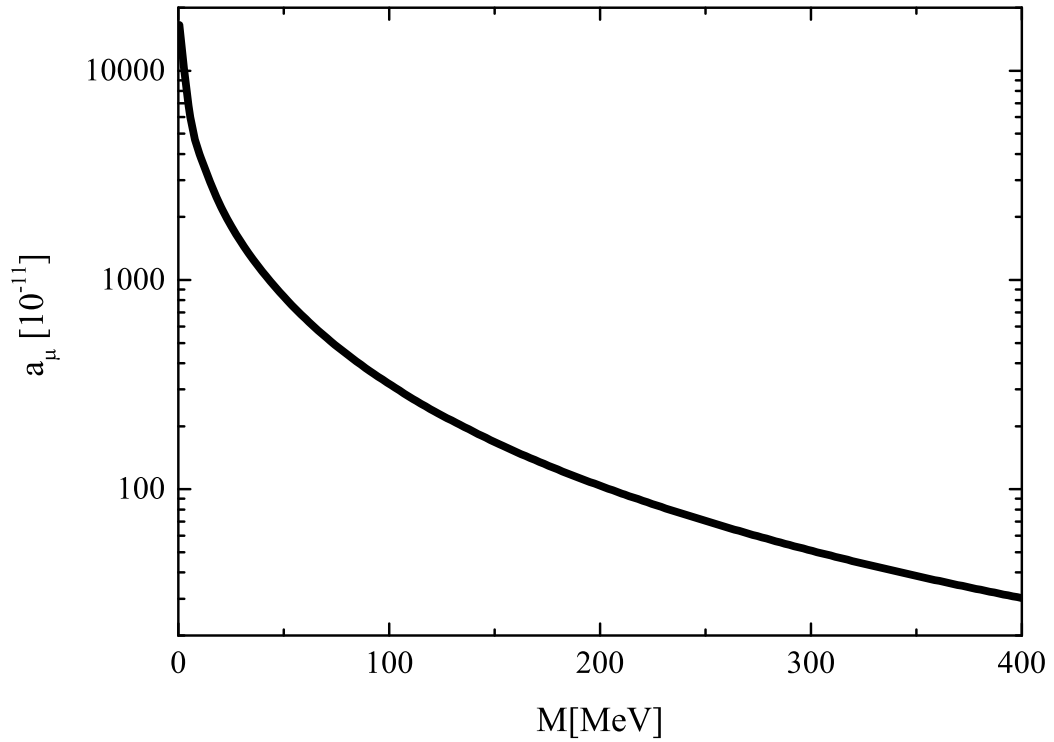


Рис. 3.3: Поведение вклада в АММ мюона от кварковой петлевой диаграммы в локальной модели в зависимости от величины массы кварка.

На Рис. 3.3 показано поведение вклада от кварковой петли в локальной модели для массы конституентного кварка M до 400 МэВ. В области малых масс вклад ведет себя как $\ln \frac{m_\mu}{M}$,

в то время как для больших $\left(\frac{m_\mu}{M}\right)^2$. В нелокальной модели в эвклидовой области энергий при малых значениях импульса кварк имеет массу $m = m_c + m_d$ порядка конституентной массы в локальной модели, при больших импульсах – масса стремится к токовой. Можно

было бы наивно ожидать, что вклад в нелокальной модели для произвольной массы кварка будет больше вклада в локальной модели. Однако в нелокальной модели появляются дополнительные вклады, за счет наличия нелокальных вершин взаимодействия кварков с калибровочными полями, которые делают данное предположение не столь очевидным.

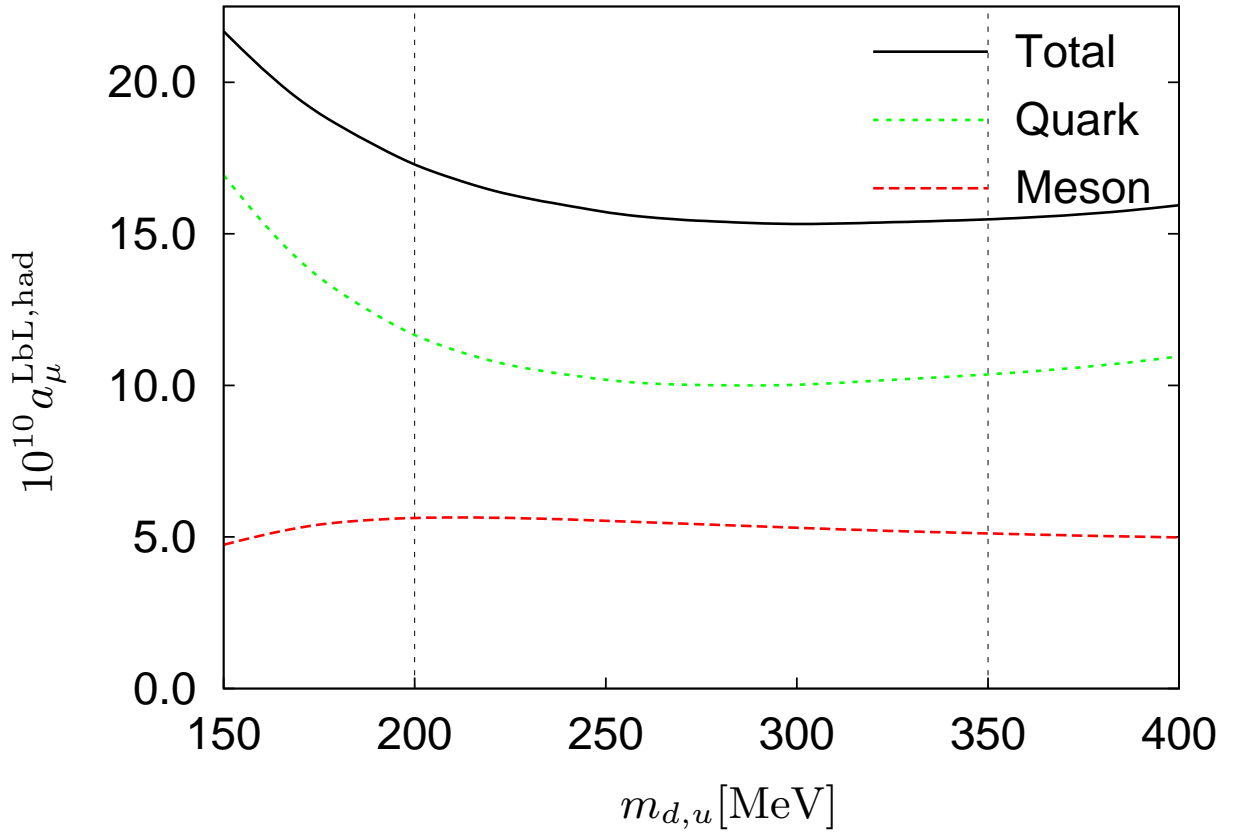


Рис. 3.4: Полный вклад от процесса рассеяния света на свете. Везде приведена зависимость от свободного параметра динамической массы в рамках ее физической области.

На Рис. 3.4 приводится поведение вклада в АММ мюона в зависимости от динамической массы кварка. Из графика легко видеть, что происходит частичная компенсация изменения вкладов контактного типа и диаграмм с промежуточным мезонным состоянием в аномальный магнитный момент мюона.

Модельная ошибка в предсказании вклада оценивается как разброс вклада в АММ мюона в промежутке динамической массы кварка 200-350 МэВ. Для динамической массы кварка 300 МэВ величину контактного вклада можно представить в виде:

$$a_{\mu}^{LbL;contact} = [+15.7 - 13.1 + 7.5] \times 10^{-10} = 10.1 \times 10^{-10}, \quad (3.17)$$

где первое слагаемое задает величину локального вклада, второе слагаемое дает диаграмма с присутствием нелокальной однофотонной вершины, и третье слагаемое соответствует всем оставшимся диаграммам.

Как видно, существенный вклад дают нелокальные вершины взаимодействия кварков с внешними калибровочными полями, которые частично подавляют увеличение вклада от локальных вершин.

Если учесть вклад, который дается скалярными и псевдоскалярными промежуточными состояниями, то вклад от LbL процесса в АММ мюона будет составлять:

$$a_{\mu}^{LbL} = 16.3 \pm (1.6) \cdot 10^{-10}, \quad (3.18)$$

что приводит к уменьшению разницы теоретического предсказания в рамках стандартной модели (с описанием в нелокальной кварковой модели) и экспериментальной величиной, до уровня 3-х стандартных отклонений.

3.4 Дискуссия

Теперь можно рассмотреть значения вклада в АММ мюона от процесса рассеяния света на свете в рамках различных моделей и попытаться понять с чем связано различие, какой было бы правильнее подход использовать с точки зрения физики процесса.

Если посмотреть на Таблицу 3.1, то можно увидеть, что отличие эксперимента от теоретического предсказания составляет $262 \pm 89 \cdot 10^{-11}$ и составляет 3.6σ . Величина вклада от процесса рассеяния света на свете в таблице соответствует вкладу, подсчитанному в рамках модели векторной доминантности [51]. Если подставить значение полученное нами в рамках нелокальной кварковой модели, то отличие будет попадать в 3σ . Такое совпадение теории с экспериментом можно получить также в рамках других моделей, которые

CONTRIBUTION	RESULT IN 10^{-11} UNITS
QED (leptons)	116 584 718.85 \pm 0.04
HVP(lo)[e^+e^-]	6 923 \pm 42
HVP(ho)	-98.4 \pm 0.7
HLbyL	105 \pm 26
EW	153 \pm 1
Total SM	116 591 801 \pm 49
Exp	116 592 089 \pm 63
Theor.-Exp.	262 \pm 89

Таблица 3.1: Вклады в рамках Стандартной модели [24]

учитывают эффект динамической массы кварка [22, 24, 62].

Так же можно увидеть, что некоторая часть моделей, в которых главную роль играет векторная доминантность (VMD и HLS (модель со скрытой локальной симметрией)) дают небольшое значение для вклада от процесса LbL. Главным образом в них подавлен или отсутствует вклад контактной диаграммы по типу кварковой петли, это объясняет такое подавление вклада, в отличии от моделей, где такой вид диаграмм присутствует и дает существенный вклад.

Также оказывается важным поведение массы кварка. Либо это фиксированная масса кварка, конститuentная, или же вводится зависимость от виртуальности кварка [23, 24, 58]. Учет зависимости массы от виртуальности кварка дает более высокий вклад от процесса рассеяния света на свете. К примеру, Мельниковым и соавторами [63] была дана оценка вклада в модели с конститuentной массой кварка. Идея построения этой модели главным образом основана на том, что существует два основных параметра: масса пиона (или массы кварков) и так же N_c - число цветов. Модель должна удовлетворять физике основанной на КХД и киральной теории поля в различных пределах по энергии. К примеру, когда N_c стремится к бесконечности, а масса пиона в ноль, то должна восстанавливаться киральная симметрия. Исходя из этой идеи Мельниковым [63], а в другом подходе [62] Пивоваровым,

π, K -loops	π^0, η, η'	axial-vect.	scalars	quark-loop	Total	Ref.
-4.5(8.1)	82.7(6.4)	1.7(1.7)	-	9.7(11.1)	89.6(15.4)	[16, 48, 64]
-19(13)	85(13)	2.5(1.0)	-6.8(2.0)	21(3)	83(32)	[65, 66]
-	83(12)	-	-	-	80(40)	[17]
0(10)	114(10)	22(5)	-	0	136(25)	[49]
-	-	-	-	-	110(40)	[55, 67]
-19(19)	114(13)	15(10)	-7(7)	2.3 [c-quark]	105(26)	[51]
-19(13)	99(16)	22(5)	-7(2)	21(3)	116(40)	[18, 40]
-	81(2)	-	-	107(2)	188(4)	[24]
-	-	-	-	-	118-148	[63]
-	68(3) [π^0]	-	-	82(6)	150(3)	[22]
-	-	6.4(2)	-3.1(0.8)	-	76(4)-125(7)	[68, 76]
-(11 - 71)	-	-	-	-	-	[69, 70]
-20(5)	-	-	-	-	-	[21, 71, 75]
-	-	-	-	143	143	[62]
-	58.5(8.7)	-	11	101	162(16)	Our results [72]
-45	$+\infty$	-	-	60	-	no FF

Таблица 3.2: Итоговая выборка оценок вклада для процесса рассеяния света на свете в АММ мюона $a_\mu^{\text{HLbL}} \times 10^{11}$ полученное различными авторами, в рамках различных подходов. Последняя линия показывает случай, когда не используется форм-факторов для одевания. В этом случае вклад с мезонами становится бесконечным.

было сделано разложение для процесса LbL по величине отношения (m_μ/M_q) (где m_μ - масса мюона, M_q - конституентная масса кварка), что дало оценку вычисляемой величине.

Подход с динамической массой кварка дает довольно близкие результаты [23, 24, 58], 101 и 107 ($\times 10^{-11}$), которые немного совпадают в диапазоне ошибки. Так, поведение с плавно меняющейся массой кварка дает более высокий вклад по сравнению [22] с фиксированной конституентной массой. В работе [24] был проведен сравнительный анализ поведения вклада в АММ мюона для кварковой петли в зависимости от способа одевания кварка: динамического в Дайсон-Швингер уравнении и в расширенной Намбу-Иона-Лизинию модели (ENJL). В этой статье было показано, что при фиксации константы отвечает за перенормировку заряда на единицу, как это в ENJL модели и при динамическом одевании кварка, можно получить такой же результат как и в ENJL при конституентной массе

кварка $M_q = 200 \text{ MeV}$. Поэтому способ одевания кварка важен для характера поведения вклада при низких энергиях.

3.5 Выводы

Используя нелокальную кварковую модель, был подсчитан вклад в АММ мюона от процесса рассеяния света на свете с участием контактных диаграмм, в локальном случае соответствующих кварковому боксу. Данный вклад как, и вклад в случае с мезонными резонансами, имеет один порядок по $1/N_c$. Полученный результат имеет существенный вес в АММ от процесса рассеяния света на свете и обеспечивает две трети вычисляемой величины, и составляет величину равную

$$a_\mu^{LbL;Total} = 10.1 \cdot 10^{-10}$$

Проверено поведение вклада от диаграммы кварковый бокс для локального случая модели с фиксированной массой кварка. Полученное поведение воспроизводит известные результаты КЭД для лептонов с малыми и большими массами, с точностью до зарядового и цветового фактора.

Показано, что учет нелокальных вершин высокого (2-,3-,4-го) порядка взаимодействия внешнего калибровочного электромагнитного поля с кварками, дает существенный вклад в процесс в рамках нелокальной модели и не может быть просто выброшен. Так, при вычислении поляризационного оператора, вершинные функции взаимодействия кварков с фотонами сворачиваются с входящими импульсами фотонов, стоящих в кварковых пропагаторах, в результате там возникают слагаемые одного порядка по величине, что и вклад от локальных диаграмм.

В итоге были учтены основные диаграммы в лидирующем порядке разложения $1/N_c$ в рамках нелокальной кварковой модели. Вклад от рассеяния света на свете составил

$$a_\mu^{LbL} = 16.8(1.2) \cdot 10^{-10}.$$

Вклад, полученный в рамках нелокальной кварковой модели, согласуется с поведением вклада, когда идет одевание кварка, за счет динамической массы, зависящей от импульса кварка. Данная величина уменьшает разницу между теоретическим предсказанием в рамках стандартной модели и экспериментальными данными до уровня стандартных отклонения.

Заключение

Диссертация посвящена вычислению вклада в аномальный магнитный момент мюона в адронном секторе от процесса рассеяния света на свете в нелокальной кварковой модели.

В первой главе была рассмотрена нелокальная кварковая модель, с нелокальностью мотивированной моделью инстантонной жидкости. В рамках этой модели рассмотрено построение кваркового и мезонного пропагатора, учет эффекта смешивания мезонных полей и получены выражения для углов смешивания. Так же были построены основные вершинные функции взаимодействия полей: кварк, антикварк, мезон и калибровочные поля. Данные функции играют важную роль при вычислении вкладов в АММ мюона от процесса рассеяния света на свете.

Вторая глава диссертации посвящена вычислению вклада в АММ мюона от процесса рассеяния света на свете с участием промежуточного мезонного состояния. Вначале рассмотрено общее выражение для случая процесса рассеяния света на свете с промежуточными мезонными состояниями, а потом конкретно разобраны и вычислены случаи для легких псевдоскалярных и скалярных мезонов в рамках нелокальной кварковой модели. Величина суммарного вклада скалярных и псевдоскалярных мезонов составила $a_{\mu}^{LbL,S+PS} = (6.25 \pm 0.83) \cdot 10^{-10}$. Полученная величина в полтора раза меньше результатов, полученных другими группами [17–19, 24, 48, 49, 54, 73, 77]. Данный фактор объясняется тем, что была полностью учтена кинематическая зависимость промежуточного виртуального состояния мезона, лежащего вне массовой поверхности.

Третья, заключительная глава посвящена вычислению вклада в АММ мюона от про-

цесса рассеяния света на свете от контактных диаграмм, возникающих в рамках модели. Был выбран способ вычисления выражений с помощью проектирования производной от поляризационного 4-х тензора на аномальный магнитный момент. Величина вклада от данного процесса составила $a_{\mu}^{LbL;Total} = 10.1 \cdot 10^{-10}$. Это позволило дать оценку на величину полного вклада в АММ мюона от LbL процесса в рамках нелокальной модели $a_{\mu}^{LbL} = 16.8(1.2) \cdot 10^{-10}$. В сумме с остальными вкладами подсчитанными в рамках стандартной модели наши вычисления уменьшают отличие предсказаний теории от экспериментальных данных до уровня трех стандартных отклонений. Это к сожалению не может закрыть вероятность обнаружения "новой" физики в этом эксперименте, так как будущие эксперименты уменьшат ошибку в 3-4 раза и разница вырастет. В будущем также представляется важным оценить вклады следующего порядка разложения по $1/N_c$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность своим руководителям А.Е. Раджабову и А.Е. Дорохову за постановку задачи, помощь и совместные дискуссии в ходе выполнения ее. Так же хочу поблагодарить А.Н. Валла, который всегда поддерживал меня за время учебы в университете и в аспирантуре. А так же я благодарен РФФИ за финансовую поддержку осуществляемых исследований.

Приложение А

Приложение

А.1 Нелокальные вершины взаимодействия с внешним векторным полем

Действие (1.1) будет неинвариантно относительно локальных калибровочных преобразований, поэтому для калибровочно инвариантного введения внешних полей необходимо учесть вклады, индуцированные нелокальным взаимодействием. В дальнейшем эти калибровочные поля будут отождествлены с электрослабыми полями. Метод состоит в том, что к кварковому полю добавляют Швингеровский фазовый фактор

$$q(y) \rightarrow Q(x, y) = \mathcal{P} \exp \left\{ i \int_y^x dz^\mu [V_\mu^a(z) + A_\mu^a(z) \gamma^5] T^a \right\}, \quad (\text{A.1})$$

где \mathcal{P} - оператор упорядочивания по путям, который в каждом члене разложения экспоненты расставляет матрицы слева направо в порядке движения точки z по траектории от x к y , $V_\mu^a(z)$ и $A_\mu^a(z)$ - это калибровочные векторные и аксиально-векторные поля, соответственно, T^a - генераторы группы ароматов.

Надо определить способ работы с интегралами по путям. Будем использовать формализм, в котором производная от интеграла по путям от произвольной функции $F_\mu(z)$ не зависит от траектории, по которой берется данный интеграл.

$$\frac{\partial}{\partial y_\mu} \int_x^y dz_\nu F_\nu(z) = F_\mu(y), \quad (\text{A.2})$$

$$\delta^4(x-y) \int_x^y dz_\mu F_\nu(z) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Фактически это означает, что при дифференцировании затрагивается только последняя точка пути, а траектория остается неизменной. В результате неминимальные взаимодействия, которые могут быть индуцированы кинетическим членом кварков, отсутствуют.

Использование Швингеровского фактора для введения взаимодействия с калибровочными полями в кинетическом члене эквивалентно действию ковариантной производной.

Теперь мы можем записать действие, включающее в себя взаимодействие с калибровочными полями.

$$S(\bar{q}, q, \pi, \sigma, \rho, \omega, a_1, V, A) = \int d^4x \{ \bar{q}(i\hat{\partial}_x - m_c - \hat{V} - \hat{A}\gamma^5)q - \frac{1}{2G_1}(\pi^a(x)^2 + \sigma^a(x)^2) + \Sigma\Phi_i(x) \left(\int d^4x_1 d^4x_2 f(x_1)f(x_2)\bar{Q}(x-x_1, x)\Gamma_i Q(x, x-x_2) \right) \} \quad (\text{A.4})$$

Суммирование тут идет по всем мезонным полям Φ_i (π, σ). Калибровочно инвариантное взаимодействия с полями, приводит к появлению дополнительных вершин, индуцированных нелокальным взаимодействием, содержащих произвольное количество внешних полей.

Для получения вершин взаимодействия кварков с калибровочными полями, нужно проварьировать действие по полям кварков и по калибровочным полям [26]. Рассмотрим получение вершины взаимодействия кварка и антикварка с векторным полем $V_\mu(z)$

$$\Gamma = \frac{\delta^3 S}{\delta q(z_1)\delta \bar{q}(z_2)\delta V_\mu(z)}. \quad (\text{A.5})$$

Помимо обычных вершин взаимодействия кварков с калибровочными полями, появятся также вершины обусловленные нелокальностью взаимодействия,

$$\begin{aligned} \Gamma_{NL} = & -\sigma_0 \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 f(x_1) f(x_2) \delta(z_1 - (x - x_1)) \delta(z_2 - (x - x_2)) \times \\ & \times \frac{\delta}{\delta V_\mu(z)} [E(x - x_1, x) E(x, x + x_2) |_{V_\mu=0}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

где:

$$E(x, y) = \mathcal{P} \exp \left(i \int_x^y du_\mu V_\mu^a(u) T^a \right); \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\delta}{\delta V_\mu(z)} E(x, y) |_{V_\mu=0} = iT^a \int_x^y du_\mu \delta(z - u). \quad (\text{A.8})$$

Можно перейти к импульсному пространству, сделав Фурье-преобразование с помощью интегрирования по $d^4z d^4z_1 d^4z_2$ с весом:

$$\int d^4z d^4z_1 d^4z_2 \exp(ip_1 z_1 - ip_2 z_2 - iqz). \quad (\text{A.9})$$

После этого получим следующее выражение для нелокальной вершины,

$$\begin{aligned} \Gamma_{NL} = & iT^a \sigma_0 \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{ip_1(x-x_1) - ip_2(x-x_2)} f(x_1) f(x_2) \times \\ & \times (J_\mu(x - x_1, x, q) + J_\mu(x, x + x_2, q)) = \\ & = iT^a \sigma_0 \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{-ix(p_1 - p_2 - q) - ip_1 x_1 - ip_2 x_2} f(x_1) f(x_2) \times \\ & \times (J_\mu(-x_1, 0, q) + J_\mu(0, x_2, q)), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

где:

$$\begin{aligned} \int dz e^{iqz} \int du \delta(z - u) &= \int du e^{iqu}, \\ J_\mu(y, x, p) &= \int_x^y du_\mu e^{ipu}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

После интегрирования по d^4x получаем δ -функцию, отвечающую закону сохранения импульса и энергии в вершине взаимодействия $(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 - q)$. Для получения нелокальных вершин нужно найти выражения для интегралов по d^4x_1 и d^4x_2

$$\int dx_1 e^{-ip_1 x_1} f(x_1) J_\mu(-x_1, 0, p), \quad (\text{A.12})$$

$$\int dx_2 e^{-ip_2 x_2} f(x_2) J_\mu(0, x_2, p). \quad (\text{A.13})$$

Следующим шагом сделаем преобразования Фурье для форм-фактора $f(x)$ и разложение в ряд Макларена для его образа $\tilde{f}(q)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \tilde{f}(q^2) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \sum \frac{1}{n!} \tilde{f}^{(n)}(0) (q^2)^n = \\ &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \sum \frac{1}{n!} \tilde{f}^{(n)}(0) (-\partial_x^2)^n e^{iqx}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Подставим данное разложение в (A.12, A.13) и получим:

$$\int d^4 x_2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \sum \frac{1}{n!} \tilde{f}^{(n)}(0) [(-\partial_{x_2}^2)^n e^{-iqx}] e^{-ip_2 x_2} J_\mu(0, x_2, p). \quad (\text{A.15})$$

Здесь производная действует только на экспоненту, стоящую в квадратных скобках. Можно перенести действие производной на $e^{-ip_2 x_2} J_\mu(0, x_2, p)$, и используя соотношение (A.15) и сворачивая ряд обратно, получим:

$$\int d^4 x_2 e^{-ip_2 x_2} f(x_2) J_\mu(0, x_2) = i(2p_2 + p)_\mu f^{(1)}(p_2 + p, p_2). \quad (\text{A.16})$$

Здесь введено сокращенное выражение для конечноразностной производной первого порядка:

$$f^{(1)}(k_1, k_2) = \frac{f(k_1) - f(k_2)}{k_1^2 - k_2^2}. \quad (\text{A.17})$$

Похожее выражение получается для интеграла по $d^4 x_1$:

$$\int d^4 x_1 e^{-ip_1 x_1} f(x_1) J_\mu(-x_1, 0, p) = i(2p_1 - p)_\mu f^{(1)}(p_1 - p, p_1). \quad (\text{A.18})$$

После всех этих преобразований, выражение для нелокальной вершины взаимодействия фотона с кварками примет вид:

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu - (p_1 + p_2)_\mu m^{(1)}(p_1, p_2) \quad (\text{A.19})$$

где сумма локальной и нелокальной части.

Помимо данной нелокальной вершины взаимодействия кварк-антикварк с внешним калибровочным полем (абелевым или неабелевым) из бозонизованного действия следует, что существуют также и более сложное взаимодействие порождаемое инстантонным полем. Такие как мезон-кварк-антикварк- n -калибровочных полей или кварк-антикварк- n -калибровочных. В данном приложении рассмотрим только те что необходимы для вычисления вклада от LbL процесса в АММ мюона.

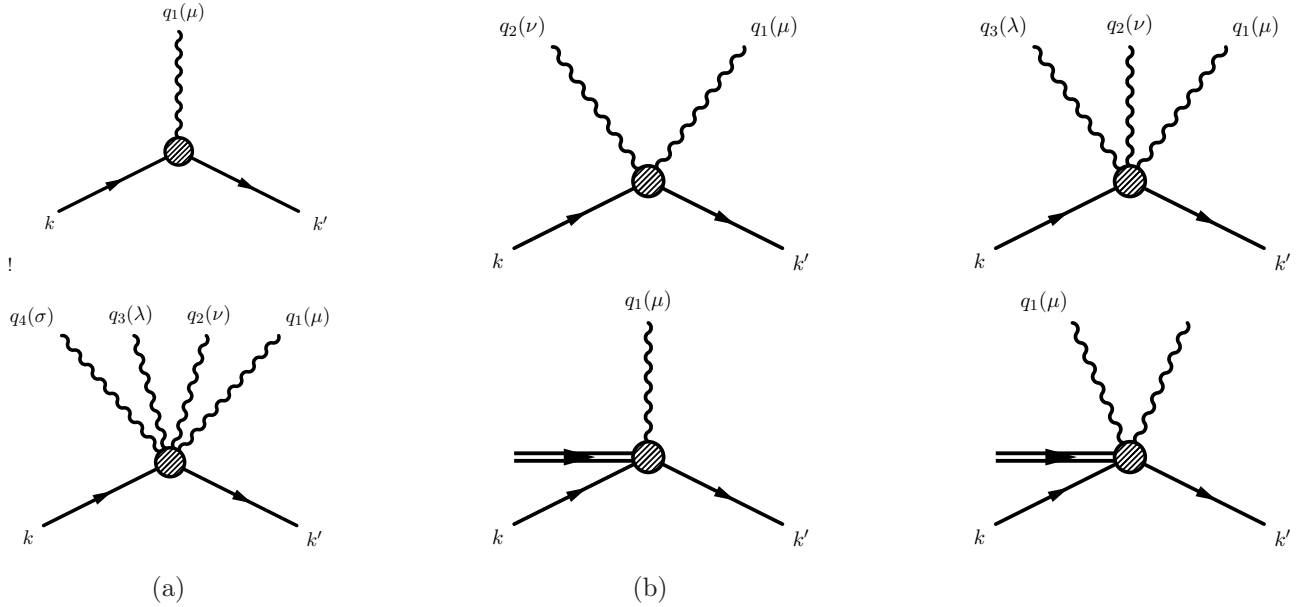


Рис. А.1: Фейнмановские диаграммы, описывающие вершины взаимодействия кварк-антикварк-фотон Γ^μ , ф-ла. (A.19), -2фотона $\Gamma^{\mu\nu}$, ф-ла. (A.29), -3 фотона $\Gamma^{\mu\nu\rho}$, ф-ла. (A.31), -4 фотонами $\Gamma^{\mu\nu\rho\tau}$, мезон-кварк-антикварк-фотон $\Gamma_{p_2, p_1, q_1, q_2}^{\mu, \nu}$, ф-ла. (A.22) и $\Gamma_{p_2, p_1, q_1, q_2}^{M; \mu, \nu}$, ф-ла. (A.23) мезон-кварк-антикварк - с двумя фотонами.

Для того чтобы построить вершины взаимодействия мезон-кварк-антикварк- n -калибровочных нужно провести подобную процедуру, только нужно включить еще поле мезона или еще одно калибровочное поле. Такие вершины будут чисто нелокальными.

$$\Gamma = \frac{\delta^4 S}{\delta q(z_1) \delta \bar{q}(z_2) \delta V_\mu(z) \delta \Phi(x)}. \quad (\text{A.20})$$

при взаимодействии с одним фотоном,

$$\Gamma = \frac{\delta^5 S}{\delta q(z_1) \delta \bar{q}(z_2) \delta V_\mu(z) \delta V_\mu(z') \delta \Phi(x)}. \quad (\text{A.21})$$

при взаимодействии с парой виртуальных фотонов и мезонным полем.

В результате получаем вершину взаимодействия схожую чем-то по структуре когда векторное поле взаимодействует только с парой кварк-антикварк. Тут появляется константа связи кварков с мезоном и зависимость от импульса кварка выражается для каждого своим формфактором. Вершина с одним векторным полем имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{p_2, p_1, q}^{M; \mu} = & -g_M(k) \left(f^{(1)}(p_1, p_1 + q) f(p_2) (2p_1 + q)_\mu T^a \Gamma_M^b + \right. \\ & \left. + f^{(1)}(p_2, p_2 - q) f(p_1) (2p_2 - q)_\mu \Gamma_M^b T^a \right). \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

С двумя векторными полями

$$\begin{aligned} \Gamma_{p_2, p_1, q_1, q_2}^{M; \mu, \nu} = & -g_M(k) \left\{ G_{\mu\nu}^{ab}(p_1, q_1, q_2, p_2) \Gamma_M^c + \Gamma_M^c G_{\mu\nu}^{ab}(p_2 - q_1 - q_2, q_1, q_2, p_1) \right. \\ & \left. + G_\mu^a(p_1, q_1) \Gamma_M^c G_\nu^b(p_2 - q_2, q_2) + G_\mu^a(p_2 - q_1, q_1) \Gamma_M^c G_\nu^b(p_1, q_2) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

где

$$\begin{aligned} G_\mu^a(k, q) = & iT^a (2k + q)_\mu f^{(1)}(k, k + q), \\ G_{\mu\nu}^{ab}(k, q, q', k') = & -f(k') \left\{ T^a T^b [g_{\mu\nu} f^{(1)}(k, k + q + q') + \right. \\ & \left. + [2(k + q') + q]_\mu (2k + q')_\nu f^{(2)}(k, k + q', k + q + q')] + \right. \\ & \left. + [(q, a, \mu) \longleftrightarrow (q', b, \nu)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Помимо конечно-разностной производной первого порядка, тут и далее используются конечно разностные производные второго и высшего порядка. Коротко запись которых

можно представить, как

$$f^{(n)}(a, b_1, b_2) = \frac{f^{(n-1)}(a, b_1) - f^{(n-1)}(a, b_2)}{(a + b_1)^2 - (a + b_2)^2}, \quad (\text{A.25})$$

$$f^{(n)}(a, \{b_i\}, b_1, b_2) = \frac{f^{(n-1)}(a, \{b_i\}, b_1) - f^{(n-1)}(a, \{b_i\}, b_2)}{(a + b_1)^2 - (a + b_2)^2}. \quad (\text{A.26})$$

Помимо этого существенно важную роль для расчетов вклада в процесс рассеяния света на свете играют вершинные функции, описывающие взаимодействия кварк-антикварк- n -векторными (фотонными полями). Так как далее мы рассматриваем взаимодействие именно с фотонными полями, то генераторы группы $U(1)$ которой они принадлежат, можно опустить. Так как они просто равны единичной матрице $T^a = I$.

$$\Gamma = \frac{\delta^{2+n} S}{\delta q(z_1) \delta \bar{q}(z_2) \delta^n V_{\mu_n}(z_{i,i=1,\dots,n})}. \quad (\text{A.27})$$

После процедур приведенных ранее можно построить вершинные функции для 1,2,3,4 - фотон-кварк-антикварк. Ранее приведенная вершина взаимодействия с одним фотоном:

$$\Gamma_\mu(q_1) = -(k + k_1)_\mu m^{(1)}(k, k_1) \quad (\text{A.28})$$

Далее для упрощения записи будут использоваться следующие обозначения: $k_1 = k + q_1$, $k_{ij..k} = k + q_i + q_j + \dots + q_k$. Где k - импульс бегущего (входящего) кварка, а q_i - импульсы входящих векторных бозонов. Все константы связи и заряды опущены.

Для взаимодействия с двумя фотонами

$$\Gamma_{\mu\nu}(q_1, q_2) = \left[2g_{\mu\nu} m^{(1)}(k, k_{12}) + (k + k_1)_\mu (k_1 + k_{12})_\nu m^{(2)}(k, k_1, k_{12}) + (k + k_2)_\nu (k_2 + k_{12})_\mu m^{(2)}(k, k_2, k_{12}) \right] \quad (\text{A.29})$$

С тремя фотонными линиями

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu\rho}(q_1, q_2, q_3) = & - \\
& [+ 2g_{\mu\nu}(k_{12} + k_{123})_{\rho}m^{(2)}(k, k_{12}, k_{123}) + 2g_{\mu\nu}(k + k_3)_{\rho}m^{(2)}(k, k_3, k_{123}) \\
& + 2g_{\mu\rho}(k_{13} + k_{123})_{\nu}m^{(2)}(k, k_{13}, k_{123}) + 2g_{\mu\rho}(k + k_2)_{\nu}m^{(2)}(k, k_2, k_{123}) \\
& + 2g_{\rho\nu}(k_{23} + k_{123})_{\mu}m^{(2)}(k, k_{23}, k_{123}) + 2g_{\rho\nu}(k + k_1)_{\mu}m^{(2)}(k, k_1, k_{123}) \\
& + (k_{23} + k_{123})_{\mu}(k_3 + k_{23})_{\nu}(k + k_3)_{\rho}m^{(3)}(k, k_3, k_{23}, k_{123}) \\
& + (k_3 + k_{13})_{\mu}(k_{13} + k_{123})_{\nu}(k + k_3)_{\rho}m^{(3)}(k, k_3, k_{13}, k_{123}) \\
& + (k_2 + k_{12})_{\mu}(k + k_2)_{\nu}(k_{12} + k_{123})_{\rho}m^{(3)}(k, k_2, k_{12}, k_{123}) \\
& + (k_{23} + k_{123})_{\mu}(k + k_2)_{\nu}(k_2 + k_{23})_{\rho}m^{(3)}(k, k_2, k_{23}, k_{123}) \\
& + (k + k_1)_{\mu}(k_1 + k_{12})_{\nu}(k_{12} + k_{123})_{\rho}m^{(3)}(k, k_1, k_{12}, k_{123}) \\
& + (k + k_1)_{\mu}(k_{13} + k_{123})_{\nu}(k_1 + k_{13})_{\rho}m^{(3)}(k, k_1, k_{13}, k_{123})]
\end{aligned} \tag{A.30}$$

И для четырех фотонных линий

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu\rho\tau}(q_1, q_2, q_3, q_4) = & \left[+ 4g_{\mu\rho}g_{\nu\tau}m^{(2)}(k, k_{13}, k_{1234}) + 4g_{\mu\rho}g_{\nu\tau}m^{(2)}(k, k_{24}, k_{1234}) \right. \\
& + 4g_{\mu\tau}g_{\nu\rho}m^{(2)}(k, k_{14}, k_{1234}) + 4g_{\mu\tau}g_{\nu\rho}m^{(2)}(k, k_{23}, k_{1234}) \\
& \left. + 4g_{\mu\nu}g_{\tau\rho}m^{(2)}(k, k_{12}, k_{1234}) + 4g_{\mu\nu}g_{\tau\rho}m^{(2)}(k, k_{34}, k_{1234}) \right] \\
& + 2g_{\mu\nu} \left((k + k_3)_{\rho}(k_3 + k_{34})_{\tau}m^{(3)}(k, k_3, k_{34}, k_{1234}) + \right. \\
& (k + k_3)_{\rho}(k_{123} + k_{1234})_{\tau}m^{(3)}(k, k_3, k_{123}, k_{1234}) + \\
& (k_{12} + k_{123})_{\rho}(k_{123} + k_{1234})_{\tau}m^{(3)}(k, k_{12}, k_{123}, k_{1234}) + \\
& (k_{124} + k_{1234})_{\rho}(k_{12} + k_{124})_{\tau}m^{(3)}(k, k_{12}, k_{124}, k_{1234}) + \\
& (k_{124} + k_{1234})_{\rho}(k + k_4)_{\tau}m^{(3)}(k, k_4, k_{124}, k_{1234}) + \\
& \left. (k_4 + k_{34})_{\rho}(k + k_4)_{\tau}m^{(3)}(k, k_4, k_{34}, k_{1234}) \right)
\end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
& +2g_{\mu\rho} \left((k+k_4)_\tau (k_4+k_{24})_\nu m^{(3)}(k, k_4, k_{24}, k_{1234}) + \right. \\
& \quad (k+k_2)_\nu (k_2+k_{24})_\tau m^{(3)}(k, k_2, k_{24}, k_{1234}) + \\
& \quad (k_{13}+k_{123})_\nu (k_{123}+k_{1234})_\tau m^{(3)}(k, k_{13}, k_{123}, k_{1234}) + \\
& \quad (k_{13}+k_{134})_\tau (k_{134}+k_{1234})_\nu m^{(3)}(k, k_{13}, k_{134}, k_{1234}) + \\
& \quad (k+k_4)_\tau (k_{134}+k_{1234})_\nu m^{(3)}(k, k_4, k_{134}, k_{1234}) + \\
& \quad \left. (k+k_2)_\nu (k_{123}+k_{1234})_\tau m^{(3)}(k, k_2, k_{123}, k_{1234}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2g_{\rho\nu} \left((k+k_4)_\tau (k_4+k_{14})_\mu m^{(3)}(k, k_4, k_{14}, k_{1234}) + \right. \\
& \quad (k+k_1)_\mu (k_1+k_{14})_\tau m^{(3)}(k, k_1, k_{14}, k_{1234}) + \\
& \quad (k_{23}+k_{123})_\mu (k_{123}+k_{1234})_\tau m^{(3)}(k, k_{23}, k_{123}, k_{1234}) + \\
& \quad (k_{23}+k_{234})_\tau (k_{234}+k_{1234})_\mu m^{(3)}(k, k_{23}, k_{234}, k_{1234}) + \\
& \quad (k+k_1)_\mu (k_{123}+k_{1234})_\tau m^{(3)}(k, k_1, k_{123}, k_{1234}) + \\
& \quad \left. (k+k_4)_\tau (k_{234}+k_{1234})_\mu m^{(3)}(k, k_4, k_{234}, k_{1234}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2g_{\mu\tau} \left((k+k_3)_\rho (k_3+k_{23})_\nu m^{(3)}(k, k_3, k_{23}, k_{1234}) + \right. \\
& \quad (k+k_2)_\nu (k_2+k_{23})_\rho m^{(3)}(k, k_2, k_{23}, k_{1234}) + \\
& \quad (k_{14}+k_{124})_\nu (k_{124}+k_{1234})_\rho m^{(3)}(k, k_{14}, k_{124}, k_{1234}) + \\
& \quad (k_{14}+k_{134})_\rho (k_{134}+k_{1234})_\nu m^{(3)}(k, k_{14}, k_{134}, k_{1234}) + \\
& \quad (k+k_3)_\rho (k_{134}+k_{1234})_\nu m^{(3)}(k, k_3, k_{134}, k_{1234}) + \\
& \quad \left. (k+k_2)_\nu (k_{124}+k_{1234})_\rho m^{(3)}(k, k_2, k_{124}, k_{1234}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2g_{\tau\nu} \left((k+k_3)_\rho (k_3+k_{13})_\mu m^{(3)}(k, k_3, k_{13}, k_{1234}) + \right. \\
& \quad (k+k_1)_\mu (k_1+k_{13})_\rho m^{(3)}(k, k_1, k_{13}, k_{1234}) + \\
& \quad (k_{24}+k_{124})_\mu (k_{124}+k_{1234})_\rho m^{(3)}(k, k_{24}, k_{124}, k_{1234}) + \\
& \quad (k_{24}+k_{234})_\rho (k_{234}+k_{1234})_\mu m^{(3)}(k, k_{24}, k_{234}, k_{1234}) + \\
& \quad (k+k_1)_\mu (k_{124}+k_{1234})_\rho m^{(3)}(k, k_1, k_{124}, k_{1234}) + \\
& \quad \left. (k+k_3)_\rho (k_{234}+k_{1234})_\mu m^{(3)}(k, k_3, k_{234}, k_{1234}) \right) \\
& +2g_{\tau\rho} \left((k+k_1)_\mu (k_1+k_{12})_\nu m^{(3)}(k, k_1, k_{12}, k_{1234}) + \right. \\
& \quad (k+k_2)_\nu (k_2+k_{12})_\mu m^{(3)}(k, k_2, k_{12}, k_{1234}) + \\
& \quad (k_{34}+k_{234})_\nu (k_{234}+k_{1234})_\mu m^{(3)}(k, k_{34}, k_{234}, k_{1234}) + \\
& \quad (k_{34}+k_{134})_\mu (k_{134}+k_{1234})_\nu m^{(3)}(k, k_{34}, k_{134}, k_{1234}) + \\
& \quad (k+k_1)_\mu (k_{134}+k_{1234})_\nu m^{(3)}(k, k_1, k_{134}, k_{1234}) + \\
& \quad \left. (k+k_2)_\nu (k_{234}+k_{1234})_\mu m^{(3)}(k, k_2, k_{234}, k_{1234}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (k + k_1)_\mu(k_1 + k_{12})_\nu(k_{12} + k_{123})_\rho(k_{123} + k_{1234})_\tau m^{(4)}(k, k_1, k_{12}, k_{123}, k_{1234}) \\
& + (k + k_1)_\mu(k_{13} + k_{123})_\nu(k_1 + k_{13})_\rho(k_{123} + k_{1234})_\tau m^{(4)}(k, k_1, k_{13}, k_{123}, k_{1234}) \\
& + (k + k_1)_\mu(k_{14} + k_{124})_\nu(k_{124} + k_{1234})_\rho(k_1 + k_{14})_\tau m^{(4)}(k, k_1, k_{14}, k_{124}, k_{1234}) \\
& + (k + k_1)_\mu(k_1 + k_{12})_\nu(k_{124} + k_{1234})_\rho(k_{12} + k_{124})_\tau m^{(4)}(k, k_1, k_{12}, k_{124}, k_{1234}) \\
& + (k + k_1)_\mu(k_{134} + k_{1234})_\nu(k_{14} + k_{134})_\rho(k_1 + k_{14})_\tau m^{(4)}(k, k_1, k_{14}, k_{134}, k_{1234}) \\
& + (k + k_1)_\mu(k_{134} + k_{1234})_\nu(k_1 + k_{13})_\rho(k_{13} + k_{134})_\tau m^{(4)}(k, k_1, k_{13}, k_{134}, k_{1234}) \\
& + (k_2 + k_{12})_\mu(k + k_2)_\nu(k_{12} + k_{123})_\rho(k_{123} + k_{1234})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{12}, k_{123}, k_{1234}) \\
& + (k_2 + k_{12})_\mu(k + k_2)_\nu(k_{124} + k_{1234})_\rho(k_{12} + k_{124})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{12}, k_{124}, k_{1234}) \\
& + (k_3 + k_{13})_\mu(k_{13} + k_{123})_\nu(k + k_3)_\rho(k_{123} + k_{1234})_\tau m^{(4)}(k, k_3, k_{13}, k_{123}, k_{1234}) \\
& + (k_3 + k_{13})_\mu(k_{134} + k_{1234})_\nu(k + k_3)_\rho(k_{13} + k_{134})_\tau m^{(4)}(k, k_3, k_{13}, k_{134}, k_{1234}) \\
& + (k_4 + k_{14})_\mu(k_{14} + k_{124})_\nu(k_{124} + k_{1234})_\rho(k + k_4)_\tau m^{(4)}(k, k_4, k_{14}, k_{124}, k_{1234}) \\
& + (k_4 + k_{14})_\mu(k_{134} + k_{1234})_\nu(k_{14} + k_{134})_\rho(k + k_4)_\tau m^{(4)}(k, k_4, k_{14}, k_{134}, k_{1234}) \\
& + (k_{23} + k_{123})_\mu(k + k_2)_\nu(k_2 + k_{23})_\rho(k_{123} + k_{1234})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{23}, k_{123}, k_{1234}) \\
& + (k_{23} + k_{123})_\mu(k_3 + k_{23})_\nu(k + k_3)_\rho(k_{123} + k_{1234})_\tau m^{(4)}(k, k_3, k_{23}, k_{123}, k_{1234}) \\
& + (k_{24} + k_{124})_\mu(k + k_2)_\nu(k_{124} + k_{1234})_\rho(k_2 + k_{24})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{24}, k_{124}, k_{1234}) \\
& + (k_{24} + k_{124})_\mu(k_4 + k_{24})_\nu(k_{124} + k_{1234})_\rho(k + k_4)_\tau m^{(4)}(k, k_4, k_{24}, k_{124}, k_{1234}) \\
& + (k_{34} + k_{134})_\mu(k_{134} + k_{1234})_\nu(k + k_3)_\rho(k_3 + k_{34})_\tau m^{(4)}(k, k_3, k_{34}, k_{134}, k_{1234}) \\
& + (k_{34} + k_{134})_\mu(k_{134} + k_{1234})_\nu(k_4 + k_{34})_\rho(k + k_4)_\tau m^{(4)}(k, k_4, k_{34}, k_{134}, k_{1234})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (k_{234} + k_{1234})_\mu (k + k_2)_\nu (k_{24} + k_{234})_\rho (k_2 + k_{24})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{24}, k_{234}, k_{1234}) \\
& + (k_{234} + k_{1234})_\mu (k_4 + k_{24})_\nu (k_{24} + k_{234})_\rho (k + k_4)_\tau m^{(4)}(k, k_4, k_{24}, k_{234}, k_{1234}) \\
& + (k_{234} + k_{1234})_\mu (k + k_2)_\nu (k_2 + k_{23})_\rho (k_{23} + k_{234})_\tau m^{(4)}(k, k_2, k_{23}, k_{234}, k_{1234}) \\
& + (k_{234} + k_{1234})_\mu (k_{34} + k_{234})_\nu (k + k_3)_\rho (k_3 + k_{34})_\tau m^{(4)}(k, k_3, k_{34}, k_{234}, k_{1234}) \\
& + (k_{234} + k_{1234})_\mu (k_3 + k_{23})_\nu (k + k_3)_\rho (k_{23} + k_{234})_\tau m^{(4)}(k, k_3, k_{23}, k_{234}, k_{1234}) \\
& + (k_{234} + k_{1234})_\mu (k_{34} + k_{234})_\nu (k_4 + k_{34})_\rho (k + k_4)_\tau m^{(4)}(k, k_4, k_{34}, k_{234}, k_{1234}) \Big] \quad (\text{A.32})
\end{aligned}$$

Важно отметить что все вершинные функции удовлетворяют тождествам, схожим с тождествами Уорда-Такахаши. Их удобно использовать для проверки калибровочной инвариантности фейнмановских диаграмм.

$$\Gamma^{\mu\nu} q_1^\mu q_2^\nu = + \left[m(k) + m(k_{12}) - m(k_1) - m(k_2) \right] \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu\nu\rho} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho = - \left[m(k_{123}) - m(k) + m(k_1) + m(k_2) \right. \\
\left. + m(k_3) - m(k_{12}) - m(k_{13}) - m(k_{23}) \right] \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu\nu\rho\tau} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho q_4^\tau = \left[m(k) + m(k_{1234}) + m(k_{12}) + m(k_{13}) + m(k_{14}) \right. \\
+ m(k_{34}) + m(k_{23}) + m(k_{24}) - m(k_1) - m(k_2) - m(k_3) \\
\left. - m(k_4) - m(k_{123}) - m(k_{124}) - m(k_{134}) - m(k_{234}) \right] \quad (\text{A.35})
\end{aligned}$$

A.2 Смешивание

Для учета смешивания между чистыми мезонными состояниями и рассмотрения физических мезонов нужно рассмотреть эффект смешивания. Для чего рассмотрим элементы матрицы \mathbf{G}_{ch} , которые задаются в виде:

$$\begin{aligned}
G_{00} = G \pm \frac{H}{3}(2S_u + S_s), \quad G_{88} = G \mp \frac{H}{6}(4S_u - S_s), \\
G_{08} = G_{80} = \mp \frac{\sqrt{2}}{6}H(S_u - S_s), \quad G_{33} = G \mp \frac{H}{2}S_s, \quad (\text{A.36})
\end{aligned}$$

где верхний знак стоящий в выражениях соответствует скалярному S - каналу, а нижний знак соответствует псевдоскалярному P - каналу. Для пиона G_π будет равна просто G_{33} , аналогично будет для a_0 - мезона, G_{a_0} будет равна G_{33} для скалярного случая.

Элементы матрицы для поляризованного оператора $\Pi_{ch}(P^2)$ как для скалярных, так и для псевдоскалярных мезонов представляет собой диагональную матрицу в кварк-ароматном базисе. Они задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Pi_{00}(P^2) &= \frac{1}{3}(2\Pi_{uu}(P^2) + \Pi_{ss}(P^2)), \\ \Pi_{88}(P^2) &= \frac{1}{3}(\Pi_{uu}(P^2) + 2\Pi_{ss}(P^2)), \\ \Pi_{08}(P^2) &= \Pi_{80}(P^2) = \frac{\sqrt{2}}{3}(\Pi_{uu}(P^2) - \Pi_{ss}(P^2)), \\ \Pi_{33}(P^2) &= \Pi_{uu}(P^2),\end{aligned}\tag{A.37}$$

где различие для скалярного и псевдоскалярного случая уже включено в выражение самого поляризованного оператора:

$$\begin{aligned}\Pi_{ij}(P^2) &= 8N_c \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \frac{f^2(K_+^2)f^2(K_-^2)}{D_i(K_+^2)D_j(K_-^2)} \times \\ &\times [(K_+ \cdot K_-) \mp m_i(K_+^2)m_j(K_-^2)],\end{aligned}\tag{A.38}$$

где $K_\pm = K \pm P/2$. Подобно уравнению (A.36), верхний знак соответствует тут скалярному, а нижний псевдоскалярному каналу. В свою очередь Π_{a_0} эквивалентно Π_{33} в скалярном случае и Π_π равно Π_{33} в псевдоскалярном. Тогда перенормируемый мезонный пропагатор можно представить в следующем виде.

Для псевдоскалярного случая:

$$\begin{aligned}D_{\pi_0}^{-1}(P^2) &= -G_{\pi_0}^{-1} + \Pi_{\pi_0}(P^2), \\ D_{\eta,\eta'}^{-1}(P^2) &= \frac{1}{2} \left[(A + C) \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \right].\end{aligned}\tag{A.39}$$

Скалярного случая:

$$\begin{aligned}D_{a_0}^{-1}(P^2) &= -G_{a_0}^{-1} + \Pi_{a_0}(P^2), \\ D_{\sigma,f_0}^{-1}(P^2) &= \frac{1}{2} \left[(A + C) \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2} \right],\end{aligned}\tag{A.40}$$

где

$$A = -G_{88}/\det(\mathbf{G}_{ch}) + \Pi_{00}(P^2), \quad (\text{A.41})$$

$$B = +G_{08}/\det(\mathbf{G}_{ch}) + \Pi_{08}(P^2),$$

$$C = -G_{00}/\det(\mathbf{G}_{ch}) + \Pi_{88}(P^2),$$

$$\det(\mathbf{G}_{ch}) = G_{00}G_{88} - G_{08}^2.$$

Угол смешивания зависит от квадрата импульса мезона, степени его виртуальности

$$\theta_{S,P}(P^2) = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2B}{A-C} \right] - \frac{\pi}{2} \Theta(A-C). \quad (\text{A.42})$$

Угол смешивания для (η, η') и для (σ, f_0) имеют между собой похожее поведения в зависимости от импульса, но различается на массовой поверхности мезонов.

A.3 Структуры полиномов после усреднения по импульсу мюона

После усреднения по импульсу мюона, полиномиальные функции можно представить в виде:

$$\text{Ts}_i^{XY} = \sum_{j=1}^6 \langle A \rangle_j Z_{i,j}^{XY}, \quad (\text{A.43})$$

где $\langle A \rangle_j$ есть усредненные скалярные произведения с импульсом мюона в числителе и мюонным импульсом в знаменателе ($D_1 = (P + Q_1)^2 + m_\mu^2$, $D_2 = (P - Q_2)^2 + m_\mu^2$)

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_1 &= \left\langle \frac{1}{D_1} \right\rangle = \frac{R_1 - 1}{2m_\mu^2}, & \langle A \rangle_2 &= \left\langle \frac{1}{D_2} \right\rangle = \frac{R_2 - 1}{2m_\mu^2}, \\ \langle A \rangle_3 &= \left\langle \frac{PQ_2}{D_1} \right\rangle = (Q_1 Q_2) \frac{(1 - R_1)^2}{8m_\mu^2}, \\ \langle A \rangle_4 &= \left\langle \frac{PQ_1}{D_2} \right\rangle = -(Q_1 Q_2) \frac{(1 - R_2)^2}{8m_\mu^2}, \\ \langle A \rangle_5 &= \left\langle \frac{1}{D_1 D_2} \right\rangle = \frac{1}{M_\mu^2 |Q_1| |Q_2| x} \arctan \left[\frac{zx}{1 - xt} \right], \\ \langle A \rangle_6 &= \langle 1 \rangle = 1, \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

m_μ - масса мюона, ($P^2 = -m_\mu^2$) и

$$t = \frac{(Q_1 Q_2)}{|Q_1| |Q_2|}, \quad x = \sqrt{1 - t^2}, \quad R_i = \sqrt{1 + \frac{4m_\mu^2}{Q_i^2}},$$

$$z = \frac{Q_1 Q_2}{4m_\mu^2} (1 - R_1) (1 - R_2). \quad (\text{A.45})$$

$Z_{i,j}^{XY}$ - полиномы по импульсам фотонов

$$Z_{1,1}^{AA} = (Q_1 Q_2)(Q_1^2 + (Q_1 Q_2)), \quad Z_{1,2}^{AA} = Q_2^2 \frac{3Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2}{4},$$

$$Z_{1,3}^{AA} = -Q_1^2, \quad Z_{1,4}^{AA} = Q_2^2, \quad Z_{1,6}^{AA} = \frac{(Q_1 Q_2) - Q_2^2}{2},$$

$$Z_{1,5}^{AA} = Q_2^2(2m_\mu^2 - Q_1^2 - (Q_1 Q_2))(Q_1^2 + (Q_1 Q_2)), \quad (\text{A.46})$$

$$Z_{2,1}^{AA} = \frac{Q_1^2(Q_1^2 - 2Q_3^2)}{2}, \quad Z_{2,2}^{AA} = \frac{Q_2^2(Q_2^2 - 2Q_3^2)}{2},$$

$$Z_{2,3}^{AA} = -Q_1^2, \quad Z_{2,4}^{AA} = Q_2^2, \quad Z_{2,6}^{AA} = Q_3^2 - \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{2},$$

$$Z_{2,5}^{AA} = Q_3^2(Q_1^2 Q_2^2 - 2m_\mu^2(Q_1 Q_2)),$$

$$Z_{1,1}^{AB} = -Q_1^2 Q_2^2 ((Q_1 Q_2) + Q_1^2) \frac{Q_3^2 - Q_1^2}{2},$$

$$Z_{1,2}^{AB} = -Q_2^2 \frac{(Q_1 Q_2)^2 (Q_2^2 + (Q_1 Q_2)) + Q_1^2 Q_2^2 Q_3^2}{2},$$

$$Z_{1,3}^{AB} = -Q_1^2 (Q_1 Q_2) ((Q_1 Q_2) + Q_2^2),$$

$$Z_{1,4}^{AB} = Q_2^2 (Q_1 Q_2) ((Q_1 Q_2) + Q_2^2), \quad (\text{A.47})$$

$$Z_{1,5}^{AB} = Q_1^2 Q_2^4 Q_3^2 \frac{(Q_1 Q_2) + Q_1^2}{2},$$

$$Z_{1,6}^{AB} = ((Q_1 Q_2)^2 + Q_1^2 Q_2^2) \frac{(Q_1 Q_2) + Q_2^2}{2},$$

$$\begin{aligned}
Z_{2,1}^{\text{AB}} &= \frac{Q_1^2}{2} \left(Q_2^2(Q_1^4 + (Q_1Q_2)(Q_3^2 - Q_1^2)) + \right. \\
&\quad \left. + Q_1^2((Q_1Q_2)((Q_1Q_2) + 5Q_2^2) + 2Q_2^4) \right), \\
Z_{2,2}^{\text{AB}} &= \frac{Q_2^2}{2} \left(Q_1^2(Q_2^4 + (Q_1Q_2)(Q_3^2 - Q_2^2)) + \right. \\
&\quad \left. + Q_2^2((Q_1Q_2)((Q_1Q_2) + 5Q_1^2) + 2Q_1^4) \right), \\
Z_{2,3}^{\text{AB}} &= Q_1^2((Q_1Q_2) + Q_1^2)((Q_1Q_2) + Q_2^2), \\
Z_{2,4}^{\text{AB}} &= -Q_2^2((Q_1Q_2) + Q_1^2)((Q_1Q_2) + Q_2^2), \\
Z_{2,5}^{\text{AB}} &= -Q_1^2Q_2^2Q_3^2 \frac{(Q_1Q_2)(Q_2^2 + Q_1^2) + 2Q_1^2Q_2^2}{2}, \\
Z_{2,6}^{\text{AB}} &= \frac{(Q_1^2Q_2^2 - (Q_1Q_2)^2)(Q_2^2 + Q_1^2)}{2} - Q_1^2Q_2^2Q_3^2.
\end{aligned} \tag{A.48}$$

Литература

- [1] Kirill Melnikov. Theory of the Muon Anomalous Magnetic Moment/ Kirill Melnikov, Arkady Vainshtein// Springer. — 2006.
- [2] Л.Д. Ландау. Квантовая механика. Нерелятивистская теория./ Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц// М.: Наука. — 1989. — Т.3.
- [3] Н. А. Tolhoek. Electron polarization, theory and experiment. // Rev. Mod. Phys. — 1956. — Vol.28. — p.277.
- [4] W. H. Luisell. An Experimental Measurement of the Gyromagnetic Ratio of the Free Electron./ W. H. Luisell, R. W. Pidd, H. R. Crane.// Phys.Rev. — 1954. — Vol.94.— p.7.
- [5] A. A. Schupp. Measurement of the g Factor of Free, High-Energy Electrons/ A. A. Schupp, R. W. Pidd, H. R. Crane.// Phys. Rev. — 1961. — Vol.121 — p.1;
- [6] Берестецкий В. Б. О радиационной поправке к магнитному моменту μ -мезона./ Берестецкий В. Б., Крохин О. Н., Хлебников А. К. // Жур.Эксп. и Теор. Физ. — 1955. — Т.29. — с.585;
- [7] W. S. Cowland. On Schwinger's theory of the muon.// Nucl. Phys. B — 1958. — Vol.8. — p.397.
- [8] G.W. Bennett, et al.. Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL. // Phys. Rev.D — 2006. — Vol.73 - p.072003.

- [9] F. Jegerlehner and R. Szafron. ρ^0 - gamma mixing in the neutral channel pion form factor $|F_{\pi^0}|^2$ and its role in comparing e^+e^- with tau spectral functions. // hep-ph/1101.2872
- [10] G. Venanzoni. Latest on g-2 from experiment. // Frascati Phys. Ser. — 2014. — Vol.54. — p.52.
- [11] R.M. Carey. The New Muon (g - 2) Collaboration// <http://lss.fnal.gov/archive/testproposal/0000/fermilab-proposal-0989.shtml>
- [12] J. Imazato. Particle and nuclear physics at J-PARC // Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 2004. — Vol.129. — p.81.
- [13] Naohito Saito. A novel precision measurement of muon g-2 and EDM at J-PARC / A novel precision measurement of muon g-2 and EDM at J-PARC J-PARC g-'2/EDM Collaboration // AIP Conf.Proc. — 2012. — Vol.1467. — pp.45-56.
- [14] S. Eidelman and F. Jegerlehner. Hadronic contributions to g-2 of the leptons and to the effective fine structure constant $\alpha M(z)^2$. // Z. Phys. C. — 1995. — Vol.67. — p.585. — hep-ph/9502298.
- [15] M. Davier. Reevaluation of the Hadronic Contributions to the Muon g-2 and to $\alpha(MZ)$./ M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu and Z. Zhang.// Eur. Phys. J. C. — 2011. — Vol.71. — p.1515; Erratum //Eur. Phys. J. C. — 2012. — Vol.72. — p.1874.
- [16] M. Hayakawa. Hadronic Light By Light Scattering Effect On Muon G-2. / M. Hayakawa, T. Kinoshita and A.I. Sanda. // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol.75. — p.790.
- [17] M. Knecht and A. Nyffeler. Hadronic light-by-light corrections to the muon g-2: The pion-pole contribution. // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol.65. — p.073034.
- [18] A. Nyffeler, Hadronic light-by-light scattering in the muon g-2: a new short-distance constraint on pion-exchange. // Phys. Rev. D. — 2009. — Vol.79. — p.073012.

- [19] E. Bartos. Scalar and pseudoscalar meson pole terms in the hadronic light-by-light contributions to a_{μ}^{had} . / E. Bartos, A. Z. Dubnickova, S. Dubnicka, E. A. Kuraev and E. Zemlyanaya. // Nucl. Phys. B. — 2002. — Vol. 632. — p.330.
- [20] E. A. Kuraev. Light-light Scattering Tensor and Muon Anomalous Magnetic Moment. (In Russian). / E. A. Kuraev, Z. K. Silagadze, A. A. Cheshel and A. Schiller. // Sov. J. Nucl. Phys. — 1989. — Vol.50. — p.264.
- [21] J. Bijmens and M. Z. Abyaneh. The hadronic light-by-light contribution to the muon anomalous magnetic moment and renormalization group for EFT. // EPJ Web Conf. — 2012. — Vol.37. — p.01007.
- [22] D. Greynat and E. de Rafael. Hadronic Contributions to the Muon Anomaly in the Constituent Chiral Quark Model. // JHEP. — 2012. — Vol.1207. — p.020
- [23] A. E. Dorokhov. “The pseudoscalar hadronic channel contribution of the light-by-light process to the muon $(g - 2)_{\mu}$ within the nonlocal chiral quark model. / A. E. Dorokhov, A. E. Radzhabov and A. S. Zhevlakov // Eur. Phys. J. C. — 2011. — Vol.71. — p.1702.
- [24] T. Goecke. “Hadronic light-by-light scattering in the muon g-2: a Dyson-Schwinger equation approach. / T. Goecke, C. S. Fischer and R. Williams. // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol.83. — p.094006; Erratum // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol.86. — p.099901.
- [25] M. Knecht and A. Nyffeler. Hadronic light by light corrections to the muon g-2: The Pion pole contribution. // Phys. Rev. D — 2002. — Vol.65. — p.073034.
- [26] I. V. Anikin. Pion structure in the instanton liquid model. / I. V. Anikin, A. E. Dorokhov and L. Tomio. // Phys. Part. Nucl. — 2000. — Vol.31. — p.509.
- [27] Г.В. ЕФИМОВ, М.А. ИВАНОВ. Физика легких мезонов в кварковой модели с конфайнментом. // ЭЧАЯ. — 1989. — Т.20. — p.1129. (1989).

- [28] G. V. Efimov, M. A. Ivanov. The quark confinement model of hadrons. // Bristol: IOP. — 1993.
- [29] Ж.Зинн-Жюстен. Континуальный интеграл в квантовой механике. // М.: Физматлит. — 2010.
- [30] В. Рубаков. Классические калибровочные поля. // М.: Эдиториал УРСС. — 1999.
- [31] H. Reinhardt and R. Alkofer. Instanton Induced Flavor Mixing in Mesons. // Phys. Lett. B. — 1998. — Vol.207. — p.482.
- [32] A. Scarpettini. Light pseudoscalar mesons in a nonlocal SU(3) chiral quark model. // A. Scarpettini, D. Gomez Dumm and N. N. Scoccola. // Phys. Rev. D. — 2004. — Vol.69. — p.114018.
- [33] J. Terning. Gauging nonlocal Lagrangians. // Phys. Rev. D. — 1991. — Vol.44. — p.887.
- [34] N. I. Kochelev, QCD vacuum structure and hadron properties. // Phys. Part. Nucl. — 2005. — Vol.36. — p.608.
- [35] D. Diakonov. Instantons at work. // Prog. Part. Nucl. Phys. — 2003. — Vol.51. — p.173.
- [36] G. 't Hooft, Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle, // Phys. Rev. D. — 1976. — Vol.14. — p.3432; Erratum// Phys. Rev. D. — 1978. — Vol.18. — p.2199.
- [37] S.P. Klevansky, “The Nambu—Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics.” Rev. Mod. Phys. 64:649–708,1992.
- [38] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I. // Phys.Rev. — 1961. —Vol.122. — pp.345-358.
- [39] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II. // Phys.Rev. — 1961. — Vol.124. — pp.246-254.

- [40] F. Jegerlehner and A. Nyffeler. The Muon $g-2$. // Phys. Rept. — 2009. — Vol.477. — p.1.
- [41] H. J. Behrend. A Measurement of the π^0 , η and η' electromagnetic form-factors./ CELLO Collaboration// Z. Phys. C. — 1991. — Vol.49. — p.401.
- [42] J. Gronberg. Measurements of the meson photon transition form factors of light pseudoscalar mesons at large momentum transfer. / CLEO Collaboration // Phys. Rev. D. — 1998. — Vol.57. — p.33.
- [43] B. Aubert. Measurement of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ transition form factor. / BABAR Collaboration // Phys. Rev. D. — 2009. — Vol.80. — p.052002.
- [44] P. del Amo Sanchez. Measurement of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta$ and $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta'$ transition form factors. /BABAR Collaboration// Phys.Rev.D. — 2011. — Vol.84. — p.052001.
- [45] A. S. Zhevlakov. The muon anomaly and π^0 light-by-light contribution. Estimation of the value and error band in nonlocal chiral quark model. /A. S. Zhevlakov, A. E. Radzhabov and A. E. Dorokhov. // Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 2012. — Vol. 225-227 — p.298.
- [46] K. Nakamura, et al., // J. Phys. G — 2010. — Vol.37. — p.075021.
- [47] A. E. Dorokhov. Pion radii in nonlocal chiral quark model. /A. E. Dorokhov, A. E. Radzhabov and M. K. Volkov // Eur. Phys. J. A. — 2014. — Vol.21. — p.155.
- [48] M. Hayakawa and T. Kinoshita. Pseudoscalar pole terms in the hadronic light by light scattering contribution to muon $g - 2$. // Phys. Rev. D. — 1998. — Vol.57. — p.465;
Erratum
Phys. Rev. D. — 2002. — Vol.66. — p.019902.
- [49] K. Melnikov and A. Vainshtein. Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon anomalous magnetic moment revisited.// Phys. Rev. D. — 2004. — Vol.70. — p.113006.
- [50] A. E. Dorokhov and W. Broniowski. Pion pole light-by-light contribution to $g-2$ of the muon in a nonlocal chiral quark model.// Phys. Rev. D. — 2008. Vol.78. — p.073011.

- [51] J. Prades. Lepton Dipole Moments / J. Prades, E. de Rafael and A. Vainshtein// World Scientific. — 2009. — hep-ph/0901.0306 .
- [52] M. Oertel. Meson loop effects in the NJL model at zero and nonzero temperature./ M. Oertel, M. Buballa and J. Wambach. // Phys. Atom. Nucl. — 2001 — Vol.64. — p.698.
- [53] N. N. Achasov, A. V. Kiselev. The analytical $\pi\pi$ scattering amplitude and the light scalars. // Phys. Rev. D. — 2011. — Vol.83. — p.054008.
- [54] D. K. Hong and D. Kim. Pseudo scalar contributions to light-by-light correction of muon $g-2$ in AdS/QCD. // Phys. Lett. B. — 2009. — Vol.680. — p.480.
- [55] J. Bijnens and J. Prades. The hadronic light-by-light contribution to the muon anomalous magnetic moment: Where do we stand? // Mod. Phys. Lett. A. — 2007. — Vol.22. — p.767.
- [56] D. Blaschke. Effects of mesonic correlations in the QCD phase transition. / D. Blaschke, M. Buballa, A. E. Radzhabov and M. K. Volkov. // Yad. Fiz. — 2008. — Vol.71. — p.2012.
- [57] A. S. Zhevlakov. “Scalar mesons LbL contribution to the $(g-2)$ of muon in N_χ QM./ A. S. Zhevlakov, A. E. Dorokhov and A. E. Radzhabov.// PoS Baldin -ISHEPP-XXI. — 2012. — p.063.
- [58] A. E. Dorokhov. The Light-by-Light Contribution to the Muon $(g-2)$ from Lightest Pseudoscalar and Scalar Mesons within Nonlocal Chiral Quark Model. / A. E. Dorokhov, A. E. Radzhabov and A. S. Zhevlakov. // Eur. Phys. J. C. — 2012. — Vol.72. — p.2227.
- [59] D. G. Boulware and R. Jackiw. Anomalous commutator and the box diagram. // Phys. Rev. — 1969. — Vol.186. — p.1442.
- [60] R. A. Leo. “Tensor Amplitudes for Elastic Photon-Photon Scattering./ R. A. Leo, A. Minguzzi and G. Soliani.// Nuovo Cim. A. — 1975. — Vol.30. — p.270.
- [61] R. Karplus and M. Neuman. The scattering of light by light. // Phys. Rev. — 1951. — Vol.83. — p.776.

- [62] A. A. Pivovarov. Muon anomalous magnetic moment: A Consistency check for the next-to-leading order hadronic contributions. // Phys. Atom. Nucl. — 2003. — Vol.66. — p.902.
- [63] R. Boughezal and K. Melnikov. Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon magnetic anomaly: constituent quark loops and QCD effects. // Phys. Lett. B. — 2011. — Vol.704. — p.193.
- [64] M. Hayakawa. Comment on the hadronic effect in muon g-2: Low-energy behavior of $V_0 - \pi^+$ scattering. // Phys. Rev. D. — 1996. — Vol.54. — p.6586.
- [65] J. Bijnens. Hadronic light by light contributions to the muon g-2 in the large $N(c)$ limit. / J. Bijnens, E. Pallante and J. Prades. // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol.75. — p.1447; Erratum // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol.75. — p.3781.
- [66] J. Bijnens. Analysis of the hadronic light by light contributions to the muon g-2. / J. Bijnens, E. Pallante and J. Prades. // Nucl. Phys. B. — 1996. — Vol.474. — p.379
- [67] J. P. Miller. Muon (g-2): Experiment and theory. / J. P. Miller, E. de Rafael and B. L. Roberts. // Rept. Prog. Phys. — 2007. — Vol.70. — p.795.
- [68] P. Masjuan and M. Vanderhaeghen. Ballpark prediction for the hadronic light-by-light contribution to the muon $(g - 2)_\mu$. // hep-ph/1212.0357.
- [69] K. T. Engel. Hadronic light-by-light scattering and the pion polarizability. / K. T. Engel, H. H. Patel and M. J. Ramsey-Musolf. // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol.86. — p.037502.
- [70] K. T. Engel and M. J. Ramsey-Musolf. The Muon Anomalous Magnetic Moment and the Pion Polarizability. // hep-ph/1309.2225.
- [71] M. Z. Abyaneh. The Anatomy of the Pion Loop Hadronic Light by Light Scattering Contribution to the Muon Magnetic Anomaly. // hep-ph/1208.2554.
- [72] A.E. Dorokhov. Status of the lepton g-2 and effects of hadronic corrections. / A.E. Dorokhov, A.E. Radzhabov, A.S. Zhevlakov. // Письма в ЖЭТФ. — 2014. — Vol.100.

- [73] L. Cappiello. The hadronic light by light contribution to the $(g - 2)_\mu$ with holographic models of QCD. / L. Cappiello, O. Cata and G. D'Ambrosio. // Phys.Rev.D. — 2011. — Vol.83. — p.093006.
- [74] F. Jegerlehner, The anomalous magnetic moment of the muon. // Springer Tracts Mod. Phys. — 2008. — Vol.226. — p.1.
- [75] M. J. Amarian. MesonNet 2013 International Workshop. Mini-proceedings. / M. J. Amarian, M. Bashkanov, M. Benayoun, F. Bergmann, J. Bijnens, L. C. Balkestaahl, H. Clement and G. Colangelo and et. al.// hep-ph/1308.2575.
- [76] V. Pauk and M. Vanderhaeghen. Single meson contributions to the muon's anomalous magnetic moment.// hep-ph/1401.0832.
- [77] J. Bijnens. Comment on the pion pole part of the light-by-light contribution to the muon $g-2$. / J. Bijnens, E. Pallante and J. Prades. // Nucl. Phys. B. — 2002. — Vol.626. — p.410.
- [78] A. A. Osipov. Stationary phase corrections in the process of bosonization of multi-quark interactions./ A. A. Osipov, B. Hiller, J. Moreira and A. H. Blin.// Eur. Phys. J. C. — 2006. — Vol.46. — p.225.
- [79] J. Aldins. Photon - Photon Scattering Contribution To The Sixth Order Magnetic Moments Of The Muon And Electron./ J. Aldins, T. Kinoshita, S. J. Brodsky and A. J. Dufner.// Phys. Rev. D. — 1970. — Vol.1 — p.2378.
- [80] J. Bailey. Precision measurement of the anomalous magnetic moment of the muon./ J. Bailey, W. Bartl, G. Von Bochmann, R. C. A. Brown, F. J. M. Farley, H. Joestlein, E. Picasso and R. W. Williams.// Phys. Lett. B. — 1968. — Vol.28. — p.287.