

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Ломов Владимир Павлович

**Взаимодействующее поле Рариты—Швингера и его
спиновая структура**

01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск 2007 г.

Работа выполнена на кафедре теоретической физики
Иркутского государственного университета

Научный руководитель:

доктор физико-математических
наук, доцент

Калошин Александр Евгеньевич

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических
наук, профессор

Дорохов Александр Евгеньевич

доктор физико-математических
наук, доцент

Марков Юрий Адольфович

Ведущая организация:

Институт математики СО РАН

Защита состоится 25 мая 2007 г. в 13 часов
на заседании диссертационного совета Д.212.074.04
при Иркутском государственном университете
по адресу: 664003, бульвар Гагарина, 20

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Иркутского государственного университета

Автореферат разослан «____» апреля 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент

Б. В. Мангазеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Частицы со спином $3/2$ давно известны в адронной физике, в частности, существует хорошо изученный декуплет барионов, состоящих из лёгких кварков u , d , s . Другой физический пример возникает в суперсимметричных теориях — это гравитино, являющийся суперпартнёром гравитона.

Однако теоретическое описание спина $3/2$ в рамках теории поля до сих пор сталкивается с рядом проблем, что характерно для всех полей с высшими спинами $s \geq 1$. Основные проблемы порождаются тем, что кроме спина s соответствующее квантовое поле обладает также лишними компонентами спина $s - 1, \dots$

Частицы со спином $s = 3/2$ в квантовой теории поля обычно описывают вектор-спинорным полем Ψ_α^μ , называемым полем Рариты—Швингера. Так как это поле кроме спина $3/2$ содержит лишние степени свободы, то обычно от них избавляются с помощью дополнительных условий. Среди первых работы по описанию частиц со спином $3/2$ можно назвать работы Паули и Фирца [1], Рариты и Швингера [2], Баргманна и Вигнера [3]. Наиболее общий однопараметрический лагранжиан свободного поля Рариты—Швингера с дополнительными условиями был выписан в работе Молдора и Кейса [4].

Однако учёт взаимодействия в поле Рариты—Швингера приводит к трудностям. Проблемы могут возникать либо при квантовании поля [5], либо даже на классическом уровне, где возникают парадоксы со сверхсветовым распространением сигнала [6]. Позднее было осознано [7, 8], что обе эти проблемы имеют общие корни — наличие связей между динамическими величинами. В последующем был найден путь [9, 10], следуя которому в принципе можно избежать проблемы Джонсона—Сударшана и Вело—Званзигера. Было предложено сделать вклады спина $1/2$ физическими, по крайней мере на промежуточных этапах, что можно рассматривать как некоторую регуляризацию системы. Но этот подход не был полностью реализован для взаимодействующих систем.

Несмотря на долгую историю, проблема корректного учёта взаимодействия для поля Рариты—Швингера остаётся. Поэтому при практическом использовании полного пропагатора в барионной феноменологии приходит-

ся делать некоторые приближения. Обычный способ действия состоит в учёте взаимодействия только для вкладов спина $3/2$, тогда как компоненты спина $1/2$ отбрасываются или остаются неизменными.

Широко распространён метод исследования, использующий уравнения движения и дополнительные условия на поля. В отличие от этого подхода мы будем исследовать пропагатор взаимодействующего поля Рариты—Швингера. При этом мы учитываем все спиновые степени свободы. Такой подход имеет ряд теоретических преимуществ и, кроме того, построенный пропагатор может быть непосредственно применён для анализа экспериментальных данных.

Цель работы

Целью работы является развитие теоретических квантово-полевых методов описания частиц со спином $3/2$ и их использование для описания экспериментальных данных по рождению $\Delta^{++}(1232)$ резонанса в адронных процессах.

Научная новизна

1. Предложен новый метод решения уравнения Дайсона—Швингера для поля Рариты—Швингера с учётом всех спиновых компонент. Основой метода служит введённый нами базис с простыми мультипликативными свойствами.
2. Впервые построен полный перенормированный пропагатор поля Рариты—Швингера с учётом всех компонент и обладающий нужными свойствами. При этом вклад спина $3/2$ имеет резонансный характер, а вклады спина $1/2$ являются нефизическими.
3. С использованием построенного пропагатора полное теоретико-полевое описание впервые было применено для анализа экспериментальных данных по рождению $\Delta^{++}(1232)$ резонанса в упругом π^+ р рассеянии.

Научная и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Исследованная в диссертации задача есть часть более широкой проблемы описания высших спинов в квантовой теории поля и развитые методы могут быть использованы в других физических ситуациях. Разработанный подход может быть использован в экспериментах по рождению барионных резонансов для более последовательной и физически адекватной интерпретации результатов.

Апробация работы

Основные результаты докладывались и обсуждались

- на Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых учёных, Красноярск, 2003;
- на Байкальских научных молодёжных школах по фундаментальной физике БШФФ-2004, БШФФ-2005, БШФФ-2006, Иркутск;
- на XVIII международном совещании QFTNER'2004, Санкт-Петербургский гос. университет;
- на летних Байкальских школах по физике элементарных частиц и астрофизике БШФЭЧА-2005, БШФЭЧА-2006, Иркутск—Дубна;
- на XI международном совещании по спиновой физике при высоких энергиях, ОИЯИ, Дубна, 2005;
- на XVIII международном Балдинском семинаре по проблемам физики высоких энергий, ОИЯИ, Дубна, 2006;
- на семинаре в институте математики СО РАН, Новосибирск;
- на семинарах кафедры теоретической физики физического факультета Иркутского государственного университета.

Основные положения выносимые на защиту

1. Метод построения полного пропагатора поля Рариты—Швингера. Основой метода является использование введённого нами удобного базиса. Помимо упрощения выкладок, этот базис позволяет также придать физический смысл возникающим коэффициентам.

2. Процедура перенормировки полного пропагатора поля Рариты—Швингера с учётом всех спиновых компонент. Сектор спина $3/2$ имеет обычный резонансный вид, в секторе спина $1/2$ накладываются условия отсутствия полюсов в энергетической плоскости.
3. Метод описание рождения $\Delta(1232)$ резонанса в πN столкновениях с использованием полного пропагатора поля Рариты—Швингера. Кроме хорошего описания экспериментальных данных для резонансного вклада спина $3/2$, метод позволяет качественно описать все парциальные волны для спина $1/2$.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 8 печатных работ в отечественных и зарубежных изданиях.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографического указателя, содержащего 90 ссылок. Общий объём диссертации — 84 страницы, включая 3 таблицы и 17 рисунков.

Краткое содержание работы

Во **введении** дана общая характеристика работы, отражена актуальность её темы, сформулированы цели диссертации и решаемые задачи, приведено краткое содержание работы.

В **первой главе** рассматривается пропагатор поля Рариты—Швингера с учётом взаимодействия. Известно, что для этого в квантовой теории поля нужно решить уравнение Дайсона—Швингера.

В **§ 1.1** ставится задача о нахождении полного пропагатора поля Рарита—Швингера. Частица со спином $3/2$ в квантовой теории поля описывается спин-векторным полем $\Psi_{\alpha\mu}$, где μ — векторный индекс, α спинорный индекс, который мы будем опускать ниже. Это поле называют полем Рариты—

Швингера. Общепринятый лагранжиан свободного поля имеет вид [4]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\Psi}_\mu \Lambda^{\mu\nu} \Psi_\nu, \\ \Lambda^{\mu\nu} &= (\hat{p} - M)g^{\mu\nu} + A(\gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu) + \frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1)\gamma^\mu \hat{p} \gamma^\nu + \\ &+ M(3A^2 + 3A + 1)\gamma^\mu \gamma^\nu.\end{aligned}$$

Здесь M это масса частицы, A — произвольный параметр, $p_\mu = i\partial_\mu$.

Уравнения движения, которые следуют из этого лагранжиана имеют вид

$$\Lambda^{\mu\nu} \Psi_\nu = 0.$$

Уравнения движения проще и удобнее рассматривать в импульсном пространстве. Тогда p_μ это импульс поля и пропагатор поля будет определён как

$$\Lambda^\mu{}_\nu G_0^{\nu\rho} = g^{\mu\rho} \hat{1}. \quad (1)$$

Отсюда видно, что пропагатор имеет два векторных индекса и два спинорных индекса. Мы будем называть такие объекты спин-тензорами. Из этого уравнения следует также, что $\Lambda_{\mu\nu}$ это обратный пропагатор.

Уравнения Дайсона—Швингера для пропагатора поля Рариты—Швингера $G_{\mu\nu}$ записывается как

$$G^{\mu\nu} = G_0^{\mu\nu} + G^{\mu\alpha} \Sigma_{\alpha\beta} G_0^{\beta\nu},$$

где $G_{\mu\nu}$, $G_{0\mu\nu}$ и $\Sigma_{\mu\nu}$ это соответственно полный пропагатор, свободный пропагатор и собственно-энергетическая часть, которая задаётся лагранжианом взаимодействия. Удобно записать это уравнения для обратных пропагаторов

$$(G^{-1})^{\mu\nu} = (G_0^{-1})^{\mu\nu} - \Sigma^{\mu\nu}.$$

Таким образом, чтобы найти полный пропагатор поля нужно уметь находить решения уравнения (1). Это уравнение представляет собой систему уравнений, для которой можно найти простой и компактный ответ, используя разложение по базису.

В § 1.2 мы рассматриваем несколько типов базисов для спин-тензоров. Первый базис, называемый γ -матричным базисом, возникает естественным

образом и является также полным. Разложение произвольного спин-тензора $S_{\mu\nu}$ по этому базису записывает в виде

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu}(p) = & g^{\mu\nu} \cdot s_1 + p^\mu p^\nu \cdot s_2 + \\ & + \hat{p} p^\mu p^\nu \cdot s_3 + \hat{p} g^{\mu\nu} \cdot s_4 + p^\mu \gamma^\nu \cdot s_5 + \gamma^\mu p^\nu \cdot s_6 + \\ & + \sigma^{\mu\nu} \cdot s_7 + \sigma^{\mu\lambda} p_\lambda p^\nu \cdot s_8 + \sigma^{\nu\lambda} p_\lambda p^\mu \cdot s_9 + i \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \gamma^5 \gamma_\lambda p^\rho \cdot s_{10}. \end{aligned} \quad (2)$$

Любой базис, используемый для разложения спин-тензоров, зависящих от одного импульса p , содержит десять элементов. Однако γ -матричный базис неудобен при умножении спин-тензоров.

Второй базис, называемый \hat{p} -базисом, строится из проекционных операторов [11–16]

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}^{3/2})^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - n_1^\mu n_1^\nu - n_2^\mu n_2^\nu, \\ (\mathcal{P}_{11}^{1/2})^{\mu\nu} &= n_1^\mu n_1^\nu, & (\mathcal{P}_{21}^{1/2})^{\mu\nu} &= n_1^\mu n_2^\nu, \\ (\mathcal{P}_{22}^{1/2})^{\mu\nu} &= n_2^\mu n_2^\nu, & (\mathcal{P}_{12}^{1/2})^{\mu\nu} &= n_2^\mu n_1^\nu. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n_i это «вектора»

$$n_1^\mu = \frac{\pi^\mu}{\sqrt{\pi^2}}, \quad n_2^\mu = \frac{p^\mu}{\sqrt{p^2}} I_4, \quad (n_i \cdot n_j) = \delta_{ij} I_4, \quad \pi^\mu = \frac{1}{3p^2} (-p^\mu + \gamma^\mu \hat{p}),$$

которые позволяют упростить запись выражений и подчеркнуть свойства операторов.

Введённые операторы (3) используются для разложения по \hat{p} -базису спин-тензора $S_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu}(p) = & (S_1 + S_2 \hat{p})(\mathcal{P}^{3/2})^{\mu\nu} + (S_3 + S_4 \hat{p})(\mathcal{P}_{11}^{1/2})^{\mu\nu} + (S_5 + S_6 \hat{p})(\mathcal{P}_{22}^{1/2})^{\mu\nu} + \\ & + (S_7 + S_8 \hat{p})(\mathcal{P}_{21}^{1/2})^{\mu\nu} + (S_9 + S_{10} \hat{p})(\mathcal{P}_{12}^{1/2})^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты S_i это скалярные функции переменной p^2 .

Преимуществом этого базиса является, во-первых, простота при умножении элементов базиса, а во-вторых, коэффициентам разложения S_i можно придать физический смысл. Но этот базис имеет недостаток. В определении проекционных операторов (3) есть множитель $\frac{1}{p^2}$. Это приводит к связям между коэффициентами разложения (4) S_i , чего нет для коэффициентов s_i разложения (2). Используя формулы перехода от коэффициентов S_i к s_i

можно найти эти связи

$$\begin{aligned}
2S_1(0) + S_3(0) - 3S_5(0) &= 0, \\
S_1(0) - S_3(0) - 3\tilde{S}_8(0) &= 0, \\
2S_2(0) + S_4(0) - 3S_6(0) + 3(\tilde{S}_7(0) + \tilde{S}_9(0)) &= 0, \\
\tilde{S}_8(0) + \tilde{S}_{10}(0) &= 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $S_{7,9} = \sqrt{3p^2}\tilde{S}_{7,9}$ и $S_{8,10} = \sqrt{\frac{3}{p^2}}\tilde{S}_{8,10}$.

Третий базис, называемый Λ -базисом, был введён нами на основе \hat{p} -базиса с использованием немассовых проекционных операторов Λ^\pm

$$\Lambda^\pm = \frac{\sqrt{p^2} \pm \hat{p}}{2\sqrt{p^2}},$$

где под $\sqrt{p^2}$ мы понимаем первую из ветвей аналитической функции. Десять элементов этого базиса имеют вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1 &= \Lambda^+ \mathcal{P}^{3/2}, & \mathcal{P}_2 &= \Lambda^- \mathcal{P}^{3/2}, \\
\mathcal{P}_3 &= \Lambda^+ \mathcal{P}_{11}^{1/2}, & \mathcal{P}_4 &= \Lambda^- \mathcal{P}_{11}^{1/2}, \\
\mathcal{P}_5 &= \Lambda^+ \mathcal{P}_{22}^{1/2}, & \mathcal{P}_6 &= \Lambda^- \mathcal{P}_{22}^{1/2}, \\
\mathcal{P}_7 &= \Lambda^+ \mathcal{P}_{21}^{1/2}, & \mathcal{P}_8 &= \Lambda^- \mathcal{P}_{21}^{1/2}, \\
\mathcal{P}_9 &= \Lambda^+ \mathcal{P}_{12}^{1/2}, & \mathcal{P}_{10} &= \Lambda^- \mathcal{P}_{12}^{1/2},
\end{aligned}$$

Разложение произвольного спин-тензора $S_{\mu\nu}$ по Λ -базису выражается формулой

$$S^{\mu\nu}(p) = \sum_{A=1}^{10} \bar{S}^A \mathcal{P}_A^{\mu\nu},$$

где коэффициенты \bar{S}_i являются функциями переменной $W = \sqrt{p^2}$.

Технически Λ -базиса более удобен по сравнению с \hat{p} -базисом из-за его мультипликативных свойств, представленных в табл. 1.

Как можно видеть из таблицы умножения, данный базис содержит шесть проекционных операторов и четыре нильпотентных. Мы доказали непосредственным вычислением, что это максимально возможное число проекционных операторов. Как и для \hat{p} -базиса, коэффициентам разложения по Λ -базису можно придать физический смысл. И также как для \hat{p} -базиса, между коэффициентами Λ -базиса имеются связи, возникающие из-за на-

Таблица 1. Таблица умножения элементов Λ -базиса

	\mathcal{P}_1	\mathcal{P}_2	\mathcal{P}_3	\mathcal{P}_4	\mathcal{P}_5	\mathcal{P}_6	\mathcal{P}_7	\mathcal{P}_8	\mathcal{P}_9	\mathcal{P}_{10}
\mathcal{P}_1	\mathcal{P}_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
\mathcal{P}_2	0	\mathcal{P}_2	0	0	0	0	0	0	0	0
\mathcal{P}_3	0	0	\mathcal{P}_3	0	0	0	\mathcal{P}_7	0	0	0
\mathcal{P}_4	0	0	0	\mathcal{P}_4	0	0	0	\mathcal{P}_8	0	0
\mathcal{P}_5	0	0	0	0	\mathcal{P}_5	0	0	0	\mathcal{P}_9	0
\mathcal{P}_6	0	0	0	0	0	\mathcal{P}_6	0	0	0	\mathcal{P}_{10}
\mathcal{P}_7	0	0	0	0	0	\mathcal{P}_7	0	0	0	\mathcal{P}_3
\mathcal{P}_8	0	0	0	0	\mathcal{P}_8	0	0	0	\mathcal{P}_4	0
\mathcal{P}_9	0	0	0	\mathcal{P}_9	0	0	0	\mathcal{P}_5	0	0
\mathcal{P}_{10}	0	0	\mathcal{P}_{10}	0	0	0	\mathcal{P}_6	0	0	0

личия $\frac{1}{p^2}$. С другой стороны это общеизвестен факт: при использовании проекционных операторов, всегда возникают особенности, что приводит с необходимостью к связям между коэффициентами разложения.

В § 1.3 мы подходим к решению уравнения Дайсона—Швингера используя только рассмотренные базисы. Пропагатор мы определили как решение уравнения

$$S_{\mu\alpha}G_{\nu}^{\alpha} = g_{\mu\nu}\hat{1},$$

по известному обратному пропагатору $S_{\mu\nu}$. Заметим, что проще всего решать это уравнение в Λ -базисе. Раскладывая правую часть по этому базису мы получим систему уравнений на скалярные коэффициенты \bar{G}_i и \bar{S}_i , которую легко решить. Выражения для \bar{G}_i приведены ниже

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 &= \frac{1}{\bar{S}_1}, & \bar{G}_3 &= \frac{\bar{S}_6}{\Delta_1}, & \bar{G}_4 &= \frac{\bar{S}_5}{\Delta_2}, \\ \bar{G}_2 &= \frac{1}{\bar{S}_2}, & \bar{G}_6 &= \frac{\bar{S}_3}{\Delta_1}, & \bar{G}_5 &= \frac{\bar{S}_4}{\Delta_2}, \\ & & \bar{G}_7 &= -\frac{\bar{S}_7}{\Delta_1}, & \bar{G}_8 &= -\frac{\bar{S}_8}{\Delta_2}, \\ & & \bar{G}_{10} &= -\frac{\bar{S}_{10}}{\Delta_1}, & \bar{G}_9 &= -\frac{\bar{S}_9}{\Delta_2}, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\Delta_1 = \bar{S}_3\bar{S}_6 - \bar{S}_7\bar{S}_{10}, \quad \Delta_2 = \bar{S}_4\bar{S}_5 - \bar{S}_8\bar{S}_9 = \Delta_1(-W).$$

Таблица 2. Мультипликативные свойства операторов базиса ()

	\mathcal{P}_1	\mathcal{P}_2	\mathcal{P}_3	\mathcal{P}_4
\mathcal{P}_1	\mathcal{P}_1	0	\mathcal{P}_3	0
\mathcal{P}_2	0	\mathcal{P}_2	0	\mathcal{P}_4
\mathcal{P}_3	0	\mathcal{P}_3	0	\mathcal{P}_1
\mathcal{P}_4	\mathcal{P}_4	0	\mathcal{P}_2	0

В § 1.4 мы исследуем полный пропагатор разных взаимодействующих систем дираковских фермионов с целью обнаружить аналогию с полным пропагатором Рариты—Швингера. Так как выражение (6) имеет довольно необычную структуру, то мы рассмотрим полный пропагатор двух систем дираковских фермионов. Первая система состоит из фермионов с одинаковой чётностью и лагранжианом взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = g \bar{\Psi}'(x) \gamma^5 \Psi(x) \cdot \varphi(x) + \text{э.с.} \quad \text{для } N' = 1/2^+,$$

а вторая — с разной чётностью и лагранжианом взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = g \bar{\Psi}'(x) \Psi(x) \cdot \varphi(x) + \text{э.с.} \quad \text{для } N' = 1/2^-.$$

Для вычисления полных пропагаторов воспользуемся здесь базисами из немассовых проекционных операторов. Для первой системы этот базис состоит из двух элементов Λ^\pm , для второй — из четырёх элементов

$$\mathcal{P}_1 = \Lambda^+, \quad \mathcal{P}_2 = \Lambda^-, \quad \mathcal{P}_3 = \Lambda^+ \gamma^5, \quad \mathcal{P}_4 = \Lambda^- \gamma^5, \quad (7)$$

где первые два оператора проекционные, вторые два — нильпотентные. Таблица умножения элементов этого базиса показана в табл. 2 и напоминает таблицу умножения элементов Λ -базиса табл. 1.

В результате исследования систем дираковских фермионов можно сказать следующее:

1. Коэффициенты разложения по базису проекционных операторов отвечают вкладам с определённой чётностью. Коэффициент разложения при Λ^+ отвечает состоянию со спин-чётностью $1/2^+$, тогда как коэффициент разложения при Λ^- — $1/2^-$.

2. Полю со спин-чётностью $1/2^+$ соответствует компонента при Λ^+ с полюсом $\frac{1}{W - m}$, у второй компоненты при этом полюс вида $\frac{1}{-W - m}$. Для поля со спин-чётность $1/2^-$ — наоборот.
3. Появление нильпотентных операторов в разложении говорит о наличии петлевых переходов между состояниями разной чётности.

§ 1.5 посвящён детальному анализу решения уравнения Дайсона—Швингера. Для прояснения вопроса, связанного со структурой полного пропагатора поля Рариты—Швингера нужно вычислить пороговое поведение мнимых частей собственно-энергетической функции. Для этого обратимся к стандартному лагранжиану взаимодействия $\pi N \Delta$ [13, 17]

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = g_{\pi N \Delta} \bar{\Psi}^\mu(x) (g^{\mu\nu} + a\gamma^\mu\gamma^\nu) \Psi(x) \cdot \partial_\nu \varphi(x) + \text{э.с.}, \quad (8)$$

и вычислим собственно-энергетическую функцию $\Sigma_{\mu\nu}$ в однопетлевом приближении. Пороговое поведение мнимых частей $\Sigma_{\mu\nu}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\Sigma}_1 &= \Delta \Sigma_1 + W \Delta \Sigma_2 \sim q^3, & \Delta \bar{\Sigma}_2 &= \Delta \Sigma_1 - W \Delta \Sigma_2 \sim q^5, \\ \Delta \bar{\Sigma}_3 &= \Delta \Sigma_3 + W \Delta \Sigma_4 \sim q^3, & \Delta \bar{\Sigma}_4 &= \Delta \Sigma_3 - W \Delta \Sigma_4 \sim q, \\ \Delta \bar{\Sigma}_5 &= \Delta \Sigma_5 + W \Delta \Sigma_6 \sim q, & \Delta \bar{\Sigma}_6 &= \Delta \Sigma_5 - W \Delta \Sigma_6 \sim q^3, \end{aligned}$$

где q — трёхмерный импульс πN пары в системе центра масс.

Теперь мы можем сказать следующее. Структура полного пропагатора поля Рариты—Швингера напоминает структуру полного пропагатора для системы взаимодействующих дираковских фермионов разной чётности, а коэффициенты разложения по Λ -базису отвечают членам с определённой чётностью. Поэтому мы можем говорить о том, что полный пропагатор поля Рариты—Швингера содержит кроме представления спина $3/2$, два представления со спином $1/2$, но разной чётности. Компоненты $\bar{\Sigma}_1, \bar{\Sigma}_2$ обладают спин-чётностью $3/2^+$, а пары $\bar{\Sigma}_3, \bar{\Sigma}_4$ и $\bar{\Sigma}_5, \bar{\Sigma}_6$ отвечают вкладам $1/2^+$ и $1/2^-$ соответственно.

Во **второй главе** мы разрабатываем процедуру перенормировки полного пропагатора поля Рариты—Швингера.

В § 2.1 ставится вопрос о наиболее общем лагранжиане свободного поля. Для получения такого лагранжиана мы формулируем самые общие требования на лагранжиан свободного поля

1. Лагранжиан поля должен быть линеен относительно производных. Это требование справедливо для всех фермионов.
2. Лагранжиан должен быть эрмитовым, в нашем случае это означает что $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ или $\gamma^0(S^{\mu\nu})^\dagger\gamma^0 = S^{\nu\mu}$.
3. Вклад спина $3/2$ должен иметь обычный полюсной вид.
4. Лагранжиан не должен иметь особенностей при $p^2 \rightarrow 0$. Это очевидно, но получается так, что некоторые грубые методы приводят к особенностям в пропагаторе.

Решать поставленную задачу проще в γ -матричном базисе. Решением будет лагранжиан, зависящий от четырёх произвольных вещественных параметров

$$S^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\hat{p} - M) + p^\mu\gamma^\nu(r_5 + r_4 - 1 + ia_5) + p^\nu\gamma^\mu(r_5 + r_4 - 1 - ia_5) + \gamma^\mu\gamma^\nu(M + r_1) - \gamma^\mu\hat{p}\gamma^\nu(r_4 - 1).$$

Для поля Рариты—Швингера известно преобразование, называемое точечным. Именно, преобразование поля

$$\Psi^\mu \rightarrow \Psi'^\mu = (g^{\mu\nu} + b\gamma^\mu\gamma^\nu)\Psi_\nu,$$

с параметром $b \neq -1/4$ приводит к изменению параметров свободного лагранжиана, но не изменяет вклада спина $3/2$.

Точечное преобразование с комплексным параметром позволяет избавиться от двух из четырёх параметров, но тогда они появятся в лагранжиане взаимодействия. Однако можно действовать по-другому. Убрать параметр a из лагранжиана взаимодействия $\pi N\Delta$, что упростит вычисления собственно-энергетической части, но изменит значения параметров в лагранжиане свободного поля.

В § 2.2 проводится перенормировка вклада спина $3/2$. Технически удобнее для этого использовать обратный пропагатор поля. Вкладу спина $3/2$ отвечают первые два коэффициента разложения пропагатора \bar{S}_1 и \bar{S}_2 . Используя схему перенормировки на массовой поверхности, можно записать

$$\bar{S}_1 = W - M + o(W - M) + i\frac{\Gamma}{2} \quad \text{при} \quad W \sim M.$$

Таким образом для перенормировки необходимо вычесть собственно-энергетический вклад дважды в этой точке

$$\bar{S}_1^r(W) = W - M - [\bar{\Sigma}_1(W) - \text{Re } \bar{\Sigma}_1(M) - \text{Re } \bar{\Sigma}_1'(M)(W - M)]$$

после чего, воспользовавшись соотношением $\bar{\Sigma}_2(W) = \bar{\Sigma}_1(-W)$, получим выражение для второго перенормированного коэффициента.

§ 2.3 посвящён разработке процедуры перенормировки сектора спина $1/2$. Перенормировка сектора спина $1/2$ разбивается на две части.

В первой мы накладываем на коэффициенты полного пропагатора условия (5), что гарантирует отсутствия особенностей, которые могут возникнуть в силу определения \hat{p} -базиса, в точке $p^2 = 0$. Для этого технически удобно выделить значения коэффициентов в нуле, которые мы обозначили через T_i .

Во второй, мы накладываем условия на бесконечности для сектора $1/2$. Для этого достаточно рассмотреть один из знаменателей $\Delta_2(W)$, возникающий при вычислении (6) пропагатора. Записывая его разложение по W на бесконечности

$$\Delta_2 = W^2 d_2 + W d_1 + d_0 \quad \text{при } W \rightarrow \infty,$$

и обозначив значения коэффициентов собственно-энергетической части на бесконечности как $\Sigma_{(0)i}(\infty)$, можно найти условия, при которых знаменатель $\Delta_2(W)$ становится на бесконечности константой. Это означает, что сектор спина $1/2$ не даёт физического вклада. В результате, после выполнения всех вычислений, можно записать полный перенормированный обратный пропагатор

$$S^- = - \begin{pmatrix} \tau_3 + \Sigma_3 & \sqrt{3}\tau_8 \\ \sqrt{3}\tau_8 & \tau_5 + \Sigma_5 \end{pmatrix} - W \begin{pmatrix} \tau_4 + \Sigma_4 & \sqrt{3}(\tau_7 + \Sigma_7) \\ \sqrt{3}(\tau_7 + \Sigma_7) & -\tau_6 - \Sigma_6 \end{pmatrix} - \Sigma_{(0)}^-,$$

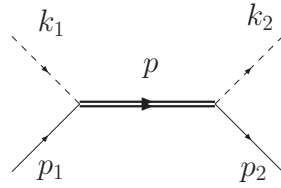
где $\Sigma_i(s)$ коэффициенты собственно-энергетической части без вычитания в нуле, $\tau_i = T_1 + \Sigma_{(0)i}(\infty)$ сумма значений коэффициентов $\Sigma_{\mu\nu}$ в нуле и на бесконечности. Константы τ_i зависят от одного параметра, который в пределе стремления к нулю константы связи, переходит в параметр A из стандартного однопараметрического лагранжиана взаимодействия (7).

В **главе третьей** мы рассматриваем применение полученного полного перенормированного пропагатора к описанию рождения $\Delta^{++}(1232)$ в упругом π^+ р рассеянии.

В **§ 3.1** мы получаем амплитуду рождения $\Delta^{++}(1232)$ используя полученный полный перенормированный пропагатор поля Рариты—Швингера и общепринятый лагранжиан взаимодействия $\pi N \Delta$

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = g_{\pi N \Delta} \bar{\Psi}_\mu(x) \theta^{\mu\nu}(a) \Psi(x) \cdot \partial_\nu \varphi(x) + \text{э.с.}$$

Резонансный вклад в амплитуду соответствует диаграмме



и записывается в аналитическом виде как

$$\mathcal{M} = g_{\pi N \Delta}^2 \cdot \bar{u}(p_2) k_2^\mu \theta_{\mu\alpha}(a) G^{\alpha\beta}(p) \theta_{\beta\nu}(a) k_1^\nu u(p_1).$$

Вклад спина $3/2$ в амплитуду имеет вид

$$\begin{aligned} R^{s=3/2} &= k_{2\mu} (G^{\mu\nu})^{s=3/2} k_{1\nu} = k_{2\mu} (\mathcal{P}_1^{\mu\nu} \bar{G}_1 + \mathcal{P}_2^{\mu\nu} \bar{G}_2) k_{1\nu} = \\ &= \Lambda^+ \left[-\bar{G}_1 \mathbf{p}^2 \cos \theta - \bar{G}_2 \frac{[(W - m)^2 - \mu^2]^2}{12W^2} \right] + \\ &+ \Lambda^- \left[-\bar{G}_2 \mathbf{p}^2 \cos \theta - \bar{G}_1 \frac{[(W + m)^2 - \mu^2]^2}{12W^2} \right], \end{aligned}$$

вклад сектора спина $1/2$

$$\begin{aligned} R^{s=1/2} &= \Lambda^+ \left[a_1^2(W) \bar{G}_4 + a_1(W) a_2(W) \bar{G}_8 + a_1(W) a_2(W) \bar{G}_9 + a_2^2(W) \bar{G}_5 \right] + \\ &+ \Lambda^- \left[a_1^2(-W) \bar{G}_3 - a_1(-W) a_2(-W) \bar{G}_7 - a_1(-W) a_2(-W) \bar{G}_{10} + a_2^2(-W) \bar{G}_6 \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_1(W) &= \frac{1}{2\sqrt{3}W} [(W - m_N)^2 - m_\pi^2], \\ a_2(W) &= \frac{1}{2W} [W^2 - m_N^2 + m_\pi^2]. \end{aligned}$$

Для использования полного пропагатора в приложениях, нам нужно иметь аналитические выражения для собственно-энергетической функции. Их можно найти, используя теорему Коши и аналитические выражения для мнимых частей собственно-энергетической функции. Вычисляя мнимые части собственно-энергетической части в однопетлевом приближении получим

$$\begin{aligned}
\Delta\Sigma_1 &= -i \frac{g^2 I_0}{(2\pi)^2} \frac{m_N}{12s} \lambda(s, m_N^2, m_\pi^2), & \Delta\Sigma_3 &= -i \frac{g^2 I_0}{(2\pi)^2} \frac{m_N}{12s} \lambda, \\
\Delta\Sigma_2 &= -i \frac{g^2 I_0}{(2\pi)^2} \frac{s + m_N^2 - m_\pi^2}{24s^2} \lambda, & \Delta\Sigma_4 &= -i \frac{g^2 I_0}{(2\pi)^2} \frac{s + m_N^2 - m_\pi^2}{24s^2} \lambda, \\
\Delta\Sigma_5 &= i \frac{g^2 I_0}{(2\pi)^2} \frac{m_N}{4s} (s - m_N^2 + m_\pi^2)^2, & \Delta\Sigma_7 &= i \frac{g^2 I_0}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{3}{s}} \frac{s - m_N^2 + m_\pi^2}{24s} \lambda, \\
\Delta\Sigma_6 &= i \frac{g^2 I_0}{(2\pi)^2} \frac{s + m_N^2 - m_\pi^2}{8s^2} \times & \Delta\Sigma_8 &= 0, \\
&\quad \times (s - m_N^2 + m_\pi^2)^2, & \Delta\Sigma_9 &= \Delta\Sigma_7, \\
& & \Delta\Sigma_{10} &= 0.
\end{aligned}$$

Здесь $\lambda(a, b, c) = (a - b - c)^2 - 4bc$, аргумент функции λ выписан полностью только в первом выражении, функция I_0 задана как интеграл

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int d^4k \delta(k^2 - m_\pi^2) \delta((p+k)^2 - m_N^2) = \\
&= \theta(p^2 - (m_N + m_\pi)^2) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\lambda(p^2, m_N^2, m_\pi^2)}{(p^2)^2}}.
\end{aligned}$$

Для сходимости интегралов мы ввели форм-фактор, зависящий от W , в константу связи

$$g \rightarrow g \cdot F(W) = g \cdot \frac{M^2 + s_L}{W^2 + s_L}.$$

В § 3.3 мы рассматриваем экспериментальные данные для процесса $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$ [18], которые характеризуются хорошей статистикой в области резонанса $\Delta(1232)$. Мы можем использовать полученный перенормированный пропагатор поля Рариты—Швингера для описания полного сечения рассеяния. Результаты фита в области энергий от порога рождения резонанса до энергии 1,32 ГэВ представлены на рис. 1. Заметим, что использование полного пропагатора поля Рариты—Швингера с учётом всех спиновых

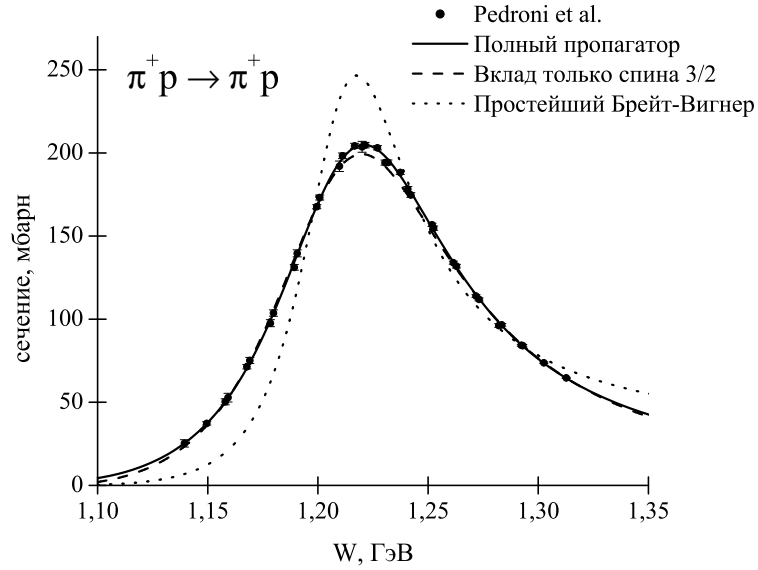


Рис. 1. Результаты описания данных [18] для сечения рассеяния π^+p в области энергий от порога до 1,32 ГэВ.

компонент даёт хорошее качество описания. Параметры наилучшего фита выписаны ниже:

$$\begin{aligned}
 M_{\Delta} &= 1232,0 \pm 0,2 \text{ МэВ} & A &= -0,576 \pm 0,014 \\
 \Gamma_{\Delta} &= 113 \pm 1 \text{ МэВ} & s_L &= -0,607 \pm 0,012 \text{ ГэВ}^2 \\
 & & \chi^2/\text{dof} &= 0,99.
 \end{aligned} \tag{9}$$

В табл. 3 показано сравнение нескольких вариантов описания, изображённых на рис. 1. Ясно, что учёт членов со спином $1/2$ в одетом пропагаторе значительно улучшает качество описания. Для сравнения на рис. 1 также можно увидеть кривую, соответствующую наивному вкладу Брейт—Вигнера с независимыми от энергии массой и шириной.

Таблица 3. Сравнение различных моделей при описании сечения рассеяния, показанного на рис. 1

Модель	χ^2/dof
Простейший Брейт—Вигнер с независимыми от энергии массой и шириной	215
Перенормированная компонента спина $3/2$	5,6
Полный пропагатор поля Рариты—Швингера со всеми компонентами	0,99

Зафиксировав свободные параметры значениями из (8), мы можем вычислить парциальные волны изоспина $3/2$ с использованием полного пропагатора. Наша амплитуда содержит четыре парциальных волны: P_{33} , D_{33} , S_{31} , P_{31} , удовлетворяющих упругому условию унитарности $\text{Im } f = |f|^2$. Оказывается, что таким образом полученные парциальные волны находятся в хорошем согласии с результатами анализ парциальных волн [19], как видно из рис. 2 и рис. 3.

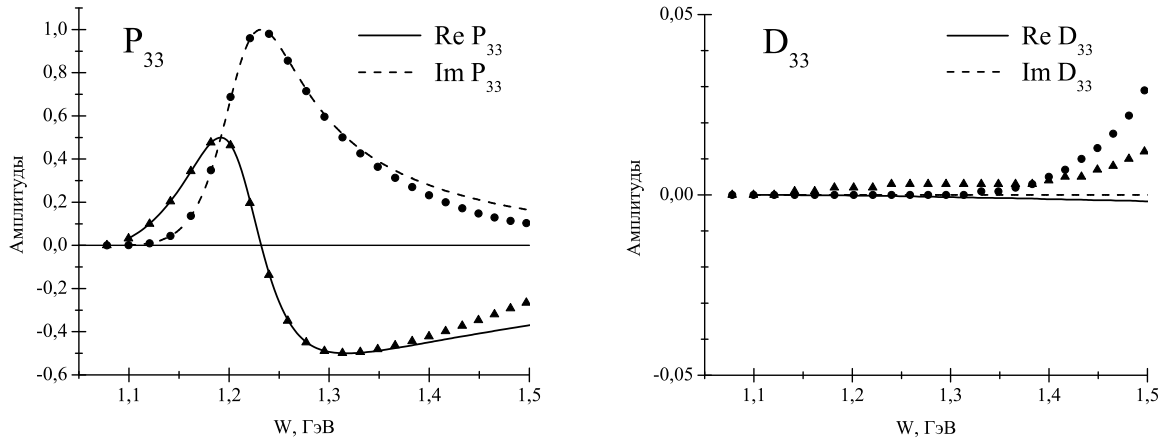


Рис. 2. Сравнение наших парциальных волн с результатами анализа парциальных волн [19] (они очень близки к результатам предыдущего анализа [20, 21] в этой области энергий). Параметры в нашей амплитуде взяты из результата фита полного сечения рассеяния (8). Наши парциальные волны удовлетворяют упругому унитарному условию $\text{Im } f = |f|^2$.

Заметим, что при $A \sim -0,5$ в нашей амплитуде наблюдается некоторое изменение в поведении. Это вполне естественно, если вспомнить, что значение $A = -0,5$ является сингулярным для свободного пропагатора.

В § 3.4 мы рассматриваем вопрос о форме фермионного резонанса. Этот вопрос естественно возник при вычислении амплитуды рождения $\Delta^{++}(1232)$. Однако в литературе до сих пор не было приведено выражения для формы фермионного резонанса.

Основное отличие от формулы для формы бозонного резонанса идёт из-за наличия структуры \hat{p} , I . Используя здесь доказавший свою эффективность метод немассовых проекционных операторов Λ^\pm , мы получили фор-

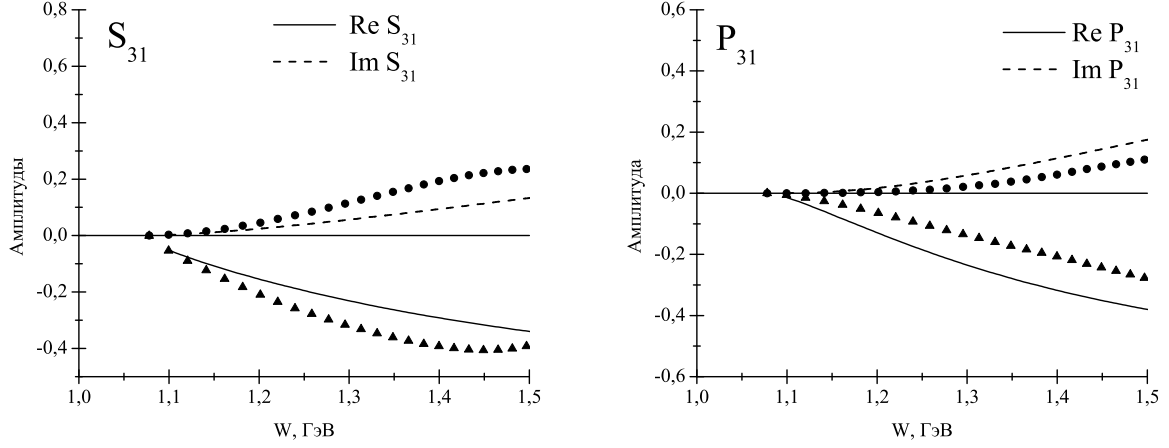


Рис. 2. Сравнение наших парциальных волн с результатами анализа парциальных волн [19] (они очень близки к результатам предыдущего анализа [20, 21] в этой области энергий). Параметры в нашей амплитуде взяты из результата фита полного сечения рассеяния (8). Наши парциальные волны удовлетворяют упругому унитарному условию $\text{Im } f = |f|^2$.

мулу для формы фермионного резонанса

$$G(p) = \frac{1}{\Delta} \left[M^S(W) - \frac{i}{2} \Gamma^S(W) + \hat{p} \left(1 - \frac{M^A(W) - \frac{i}{2} \Gamma^A(W)}{W} \right) \right],$$

где

$$\Delta(W^2) = \left(W - M^A(W) + \frac{i}{2} \Gamma^A(W) \right)^2 - \left(M^S(W) - \frac{i}{2} \Gamma^S(W) \right)^2.$$

Для определённости рассмотрим процесс $\pi N \rightarrow N'(1/2^+) \rightarrow \pi N$ и посмотрим на спиральные амплитуды в системе центра масс \mathcal{M}_{++} при $W \sim M$

$$\mathcal{M}_{++} = \cos \frac{\theta}{2} \left[\frac{(p^0 + m_N)g^2}{-W - (M^S - M^A) + i(\Gamma^S - \Gamma^A)/2} - \frac{(p^0 - m_N)g^2}{W - M + i\Gamma/2} \right],$$

где p^0 это энергия нуклона в системе центра масс.

Отсюда можно видеть, что в отличие от бозонного случая, фоновый вклад в окрестности $W = M$ не выражается через M и Γ . Эта особенность возникает из-за наличия \hat{p} в собственной энергии $\Sigma(p) = A(p^2) + \hat{p}B(p^2)$. В результате, вместо двух параметров (M и Γ) фермионная формула Брейт—Вигнера описывается 4 параметрами (можно использовать M , Γ и комплекс-

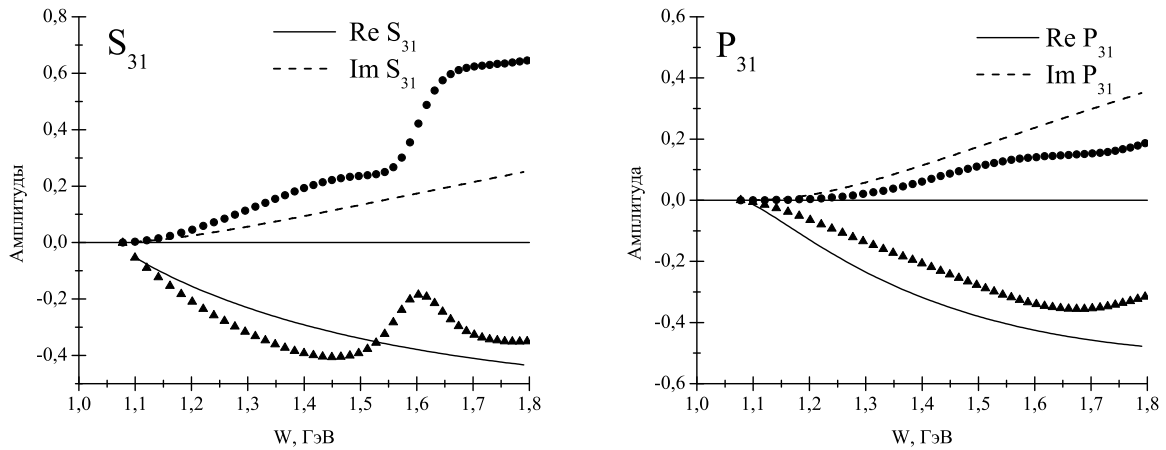


Рис. 3. То же что и для рис. 2 для парциальных волн S_{31} и P_{31} в большей области энергии.

ный фон).

Симметричная и антисимметричная части бегущих массы и ширины одного и того же порядка и это типичная ситуация.

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные при работе над диссертацией:

1. Разработанный метод решения уравнения Дайсона—Швингера позволяет получить в простой аналитической форме полный пропагатор поля Рариты—Швингера. Важным техническим моментом здесь является использование введённого нами базиса. Рассмотренные аналогии с системами дираковских фермионов позволили придать ясный физический смысл компонентам базиса и выяснить спиновый состав поля Рариты—Швингера. Использование немассовых проекционных операторов оказалось полезным приёмом во многих других задачах.
2. Для полученного полного неперенормированного пропагатора поля Рариты—Швингера был предложен способ перенормировки, с помощью которого удалось перенормировать вклад спина $3/2$ и сектор спина $1/2$. Одним из требований перенормировки было отсутствие физических вкладов в секторе спина $1/2$.
3. При исследовании процедуры перенормировки нам понадобился наиболее общий лагранжиан свободного поля, который был заново выведен с использованием нашего базиса. Полученный нами перенормированный пропагатор зависит от одного произвольного параметра, который

существует в секторе спина $1/2$.

4. Полученный полный перенормированный пропагатор был применён для описания рождения $\Delta^{++}(1232)$ в упругом π^+p рассеянии. Оказывается, что он хорошо описывает полное сечение в окрестности резонанса. Если посмотреть на парциальные волны, то волны отвечающие спину $3/2$ P_{33} и D_{33} хорошо описываются, а волны отвечающие спину $1/2$ S_{31} и P_{31} качественно соответствуют результатам парциального анализа в этой области. Таким образом, помимо резонансного вклада спина $3/2$ наш пропагатор позволяет описать также гладкие фоновые вклады спина $1/2$.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. Kaloshin A. E. Propagator of the interacting Rarita–Schwinger field / A. E. Kaloshin, V. P. Lomov // *Mod. Phys. Lett.* — 2004. — Т. А19. — С. 135–142.
2. Kaloshin A. E. The Rarita–Schwinger field: Dressing procedure and spin-parity content / A. E. Kaloshin, V. P. Lomov // *Yad. Fiz.* — 2006. — Т. 69. — С. 563–573.
3. Ломов В. П. Полный пропагатор поля Рарита–Швингера // *Сборник тезисов 9 Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых учёных*, апр. 2003 г. — Екатеринбург-Красноярск, 2003. — С. 64–66.
4. Калошин А. Е. Взаимодействующее поле Рариты–Швингера и спин-чётность его компонент. / А. Е. Калошин, В. П. Ломов // *Труды VII конференции молодых учёных «Взаимодействие полей и излучения с веществом»*, сент. 2004 г. — Иркутск, 2004. — С. 217–219.
5. Калошин А. Е. Наиболее общий вид лагранжиана поля Рариты–Швингера / А. Е. Калошин, В. П. Ломов, А. М. Моисеева // *Труды VIII конференции молодых учёных «Астрофизика и физика околоземного космического пространства»*, сент. 2005 г. — Иркутск, 2005. — С. 131–135.

6. Kaloshin A. E. Interacting Rarita–Schwinger field and its spin-parity content. / A. E. Kaloshin, V. P. Lomov // *XI Advanced Research Workshop on High Energy Spin Physics*, сент. 2005 г. — Дубна, 2005. — С. 215–220.
7. Kaloshin A. E. Interacting Rarita–Schwinger field and its spin-parity content. / A. E. Kaloshin, V. P. Lomov // *XVIIIth International Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory*, сент. 2005 г. — Москва, 2004. — С. 215–220.
8. Калошин А. Е. Формула Брейт–Вигнера для фермионов. / А. Е. Калошин, В. П. Ломов // *Труды IX конференции молодых учёных «Физические процессы в космосе и околоземной среде»*, сент. 2006 г. — Иркутск, 2006. — С. 246–249.

Список цитируемой литературы

1. Fierz M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. Lond.* — 1939. — Т. A173. — С. 211–232.
2. Rarita W. On a theory of particles with half-integral spin. / W. Rarita, J. Schwinger // *Phys. Rev.* — 1941. — Т. 60. — С. 61–62.
3. Bargmann V. Group theoretical discussion of relativistic wave equations. / V. Bargmann, E. P. Wigner // *Proc. Nat. Acad. Sci.* — 1948. — Т. 34. — С. 211.
4. Moldauer P. A. Properties of half-integral spin Dirac-Fierz-Pauli particles. / P. A. Moldauer, K. M. Case // *Phys. Rev.* — 1956. — Т. 102. — С. 279–285.
5. Johnson K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles. / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // *Annals Phys.* — 1961. — Т. 13. — С. 126–145.
6. Velo G. Propagation and quantization of Rarita–Schwinger waves in an external electromagnetic potential. / G. Velo, D. Zwanziger // *Phys. Rev.* — 1969. — Т. 186. — С. 1337–1341.

7. Aurilia A. Remarks on the constraint structure and the quantization of the Rarita–Schwinger field. / A. Aurilia, M. Kobayashi, Y. Takahashi // Phys. Rev. — 1980. — T. D22, № 6. — C. 1368–1374.
8. Kobayashi M. The Rarita–Schwinger paradoxes. / M. Kobayashi, Y. Takahashi // J. Phys. — 1987. — T. A20. — C. 6581.
9. Munczek H. New formalism for the quantization of a spin-3/2 field. / H. Munczek // Phys. Rev. — 1967. — T. 164, № 5. — C. 1794–1798.
10. Fukuyama T. Theory of interacting spin-3/2 particle. / T. Fukuyama, K. Yamamoto // Prog. of Theor. Phys. — 1973. — T. 49, № 1. — C. 304–314.
11. Aurilia A. Theory of high-spin fields. / A. Aurilia, H. Umezawa // Phys. Rev. — 1969. — T. 182, № 5. — C. 1682–1694.
12. Nieuwenhuizen van P. Supergravity. / van P. Nieuwenhuizen // Phys. Rep. — 1981. — T. 68. — C. 189–398.
13. Benmerrouche M. Problems of describing spin 3/2 baryon resonances in the effective lagrangian theory. / M. Benmerrouche, R. M. Davidson, N. C. Mukhopadhyay // Phys. Rev. — 1989. — T. C39. — C. 2339–2348.
14. Pascalutsa V. On the structure of the $\gamma N\Delta$ vertex: Compton scattering in the $\Delta(1232)$ region and below. / V. Pascalutsa, O. Scholten // Nucl. Phys. — 1995. — T. A591. — C. 658–674.
15. Korpa C. L. Complete spin structure of the pion–nucleon loop delta self-energy. / C. L. Korpa // Heavy Ion Phys. — 1997. — T. 5. — C. 77–84.
16. Almaliev A. N. Fully relativistic approach to the Δ -isobar self-energy: A possible application to the nucleon–baryon interaction. / A. N. Almaliev, I. V. Kopytin, M. A. Shehalev // J. Phys. — 2002. — T. G28. — C. 233–239.
17. Nath L. M. Uniqueness of the interaction involving spin 3/2 particles. / L. M. Nath, B. Etemadi, J. D. Kimel // Phys. Rev. — 1971. — T. D3. — C. 2153–2161.

18. Pedroni E. A study of charge independence and symmetry from π^+ and π^- total cross-sections on hydrogen and deuterium near the 3,3 resonance. / E. Pedroni, et al. // Nucl. Phys. — 1978. — T. A300. — C. 321–347.
19. Arndt R. A. Extended partial-wave analysis of πN scattering data. / R. A. Arndt, et al. // Phys. Rev. — 2006. — T. C74. — C. 045205.
20. Höhler G. Pion-nucleon scattering, Landoldt-Börnstein vol. / G. Höhler // TKP — 1983. — T. I/9b2. — C. 31.
21. Cutkosky R. E. Pion-nucleon partial wave amplitudes. / R. E. Cutkosky, et al. // Phys. Rev. — 1979. — T. D20. — C. 2839–2853.

Формат 60 × 80 1/16. Печать офсетная
Бумага типографская. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии ООО «Фрактал»
г. Иркутск, ул. Коммунистическая, 65 «А»