



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«Иркутский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

Институт математики, экономики и информатики

УТВЕРЖДАЮ

директор института

М.В. Фалалеев / Фалалеев М.В./
" 17 " 04 2019г.

Рабочая программа дисциплины

Индекс дисциплины по УП: ФТД.2

Наименование дисциплины: Теория обобщенных функций и ее приложения

Направление подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.06.01
Математика и механика

Направленность программы подготовки кадров высшей квалификации (программы аспирантуры): Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Форма обучения: очная

Согласовано с УМК ИМЭИ ИГУ
Протокол № 4 от « 17 » 04 2019 г.

Председатель УМК *В.Ф. Антоник* / В.Ф. Антоник /

Программа рассмотрена на заседании
кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений.

Протокол № 7 от « 22 » 03 2019г

Зав. кафедрой *М.В. Фалалеев* / М.В. Фалалеев /

Иркутск 2019 г.

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины (модуля)
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП.
3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной работы
5. Содержание дисциплины (модуля)
 - 5.1 Содержание разделов и тем дисциплины (модуля)
 - 5.2 Разделы дисциплины (модуля) и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами (модулями)
 - 5.3 Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий
6. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ.
7. Примерная тематика курсовых работ (проектов) (при наличии)
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):
 - а) основная литература;
 - б) дополнительная литература;
 - в) программное обеспечение;
 - г) базы данных, поисково-справочные и информационные системы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля).
10. Образовательные технологии
11. Оценочные средства. (ОС).

1. Цели и задачи дисциплины:

Цель – формирование у будущих специалистов современных теоретических знаний в области неклассических методов решения интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и практических навыков в их использовании при решении задач исследовательского типа как теоретического плана, так и с практическим содержанием, отработка начальных навыков математического моделирования. Что позволяет освоить такие трудовые функции, как проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок при исследовании самостоятельных тем, проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ по тематике организации.

Задачи – Изучить основные понятия и методы теорий обобщенных функций. Научиться выполнять все операции с обобщенными функциями в банаховых пространствах с последующим их приложением к решению начально-краевых задач для неклассических уравнений математической физики. Познакомиться с современными обобщениями этой теории.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Курс входит в блок факультативных дисциплин специализации «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». Для его изучения и освоения нужны знания из курсов математического и функционального анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, теории функций комплексных переменных. Знания и умения, приобретенные студентами в результате изучения дисциплины, востребованы в математическом моделировании, при выполнении курсовых и дипломных работ, связанных с решением конкретных задач из механики, физики и т.п.

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций: ОПК-1, ПК-1.

ОПК-1 – способностью находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики,

ПК-1 - способность корректно ставить математические задачи в выбранном направлении исследования.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные понятия дисциплины (ОПК-1).

Уметь: применить полученные знания к прикладным задачам (ОПК-1, ПК-1).

Владеть: аппаратом изученных знаний (ОПК-1, ПК-1).

4. Объем дисциплины и виды учебной работы (разделяется по формам обучения)

| Вид учебной работы | Всего часов | Семестры | | | |
|---|------------------|----------|---|-------|---|
| | | | | 3 | |
| Аудиторные занятия (всего) | 24 | | | 24 | |
| В том числе: | - | | - | - | - |
| Лекции (Л) | 12 | | | 12 | |
| Практические занятия (ПЗ) | 12 | | | 12 | |
| Самостоятельная работа (всего) | 48 | | | 48 | |
| В том числе: | - | | - | - | - |
| <i>Другие виды самостоятельной работы</i> | 48 | | | 48 | |
| Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен) | зачет | | | зачет | |
| Общая трудоемкость | часы | 72 | | 72 | |
| | зачетные единицы | 2 | | 2 | |

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов и тем дисциплины. Все разделы и темы нумеруются.

1. Основные пространства D и S .
2. Понятия обобщенной функции, регулярной и сингулярной обобщенной функции, носителя обобщенной функции, равенства двух обобщенных функций.
3. Пространства обобщенных функций D' и S' .
4. Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях и умножение обобщенных функций.
5. Дифференцирование обобщенных функций.
6. Прямое (тензорное) произведение и свертка обобщенных функций.
7. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
8. Интегральные преобразования обобщенных функций.
9. Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и некоторые специальные факты о конечномерных пространствах.
10. Корректные (равномерно корректные) задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Понятие разрешающего (эволюционного) оператора.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

| № п/п | Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин | № № разделов и тем данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин (вписываются разработчиком) |
|-------|---|---|
| 1. | Практика | 1-10 |
| 2. | НКР (диссертация) | 1-10 |

5.3. Разделы и темы дисциплины и виды занятий

| № п/п | Наименование раздела | Наименование темы | Виды занятий в часах | | | | | |
|-------|---|--|----------------------|-------------|--------|------------|------|-------|
| | | | Лек ц. | Практ. зан. | Сем ин | Ла б. зан. | СР С | Всего |
| 1 | Основное пространство D Основное пространство S | Основное пространство D Основное пространство S | 1 | | | | | 1 |
| 2 | Понятие обобщенной функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции Понятие носителя обобщенной функции и равенства двух обобщенных функций | Понятие обобщенной функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции Понятие носителя обобщенной функции и равенства двух обобщенных функций | 1 | | | | 2 | 3 |

| | | | | | | | | |
|----|--|--|---|---|--|--|---|---|
| 3 | Пространства обобщенных функций D' и S' . | Пространства обобщенных функций D' и S' . | 1 | 1 | | | 2 | 4 |
| 4 | Линейные преобразования переменных обобщенных функций в | Линейные преобразования переменных обобщенных функций в | 1 | 1 | | | 4 | 6 |
| 5 | Умножение обобщенных функций | Умножение обобщенных функций | 1 | 1 | | | 4 | 6 |
| 6 | Дифференцирование обобщенных функций | Дифференцирование обобщенных функций | 1 | 1 | | | 4 | 6 |
| 7 | Прямое (тензорное) произведение обобщенных функций | Прямое (тензорное) произведение обобщенных функций | 1 | 1 | | | 4 | 6 |
| 8 | Свертка обобщенных функций | Свертка обобщенных функций | 1 | 1 | | | 4 | 6 |
| 9 | Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами | Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами | 1 | 1 | | | 4 | 6 |
| 10 | Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами | Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами | 1 | 1 | | | 4 | 6 |
| 11 | Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка | Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка | 1 | 1 | | | 4 | 6 |
| 12 | Интегральные преобразования обобщенных функций | Интегральные преобразования обобщенных функций | 1 | 1 | | | 4 | 6 |
| 13 | Некоторые специальные факты о конечномерных пространствах | Некоторые специальные факты о конечномерных пространствах | | 1 | | | 4 | 5 |
| 14 | Понятие корректной (равномерно корректной) задачи Коши для | Понятие корректной (равномерно корректной) задачи Коши для дифференциального | | 1 | | | 4 | 5 |

| | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | дифференциального уравнения в банаховом пространстве Понятие разрешающего (эволюционного) оператора | уравнения в банаховом пространстве Понятие разрешающего (эволюционного) оператора | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

6. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

| № п/п | № раздела и темы дисциплины (модуля) | Наименование семинаров, практических и лабораторных работ | Трудоемкость (часы) | Оценочные средства | Формируемые компетенции |
|-------|--------------------------------------|---|---------------------|--------------------|-------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1. | 3 | Пространства обобщенных функций D' и S' . | 1 | зачет | ОПК-1, ПК-1 |
| 2. | 4 | Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях | 1 | | |
| 3. | 5 | Умножение обобщенных функций | 1 | | |
| 4 | 6 | Дифференцирование обобщенных функций | 1 | | |
| 5 | 7 | Прямое (тензорное) произведение обобщенных функций | 1 | | |
| 6 | 8 | Свертка обобщенных функций | 1 | | |
| 7 | 9 | Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами | 1 | | |
| 8 | 10 | Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами | 1 | | |
| 9 | 11 | Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка | 1 | | |
| 10 | 12 | Интегральные преобразования обобщенных функций | 1 | | |
| 11 | 13 | Некоторые специальные факты о конечномерных пространствах | 1 | | |
| 12 | 14 | Понятие корректной (равномерно корректной) задачи Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве Понятие разрешающего (эволюционного) оператора | 1 | | |

7. Примерная тематика курсовых работ (проектов) (при наличии) курсовых работ (проектов) не предусмотрено.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):

а) основная литература

1. **Гражданцева, Елена Юрьевна.** Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах/ Е. Ю. Гражданцева; рец.: М. В. Фалалеев, Г. А. Свиридюк; Иркутский гос. ун-т. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 91 с. - ISBN 978-5-9624-0903-0, 5 экз.

2. **Орлов, Сергей Сергеевич.** Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах/ С. С. Орлов ; рец.: А. Л. Козаков, Д. Н. Сидоров; Иркут. гос. ун-т, Ин-т математики, экономики и информатики. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – 149 с.- ISBN 978-5-9624-1030-2, 5 экз.

3. **Фалалеев, Михаил Валентинович.** Обобщенные функции и действия над ними [Текст] : учеб.-метод. пособие / М. В. Фалалеев ; Иркутский гос. ун-т. - 2-е изд., испр. и доп. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2011. - 106 с.- ISBN 978-5-9624-0503-2, 5 экз.

б) дополнительная литература

1. **Гражданцева Е.Ю.** Интегральное преобразование обобщенных функций / Е.Ю. Гражданцева – Иркутск, изд-во ИГУ, 2009.- , 5 экз.

2. **Орлов, Сергей Сергеевич.** Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах [Электронный ресурс] / С. С. Орлов. - ЭВК. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2014. - Режим доступа: ЭЧЗ "Библиотех". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-9624-1030-2.

3. **Фалалеев, Михаил Валентинович.** Обобщенные функции и действия над ними [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / М. В. Фалалеев. - 2-е изд., испр. и доп. - ЭВК. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2011. - Режим доступа: ЭЧЗ "Библиотех". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-9624-0503-2.

в) программное обеспечение –

Microsoft Windows 7 Pro 64 bit (Сублицензионный договор №570 от 07.03.2017г.);

LibreOffice (распространяется бесплатно);

AcrobatReader (распространяется бесплатно)

OpenOffice 4.1.3 Условия использования по ссылке:

<https://www.openoffice.org/licenses/PDL.html>;

LibreOffice Условия использования по ссылке: <http://www.LibreOffice.org/about-us/licenses/>;

VLC Player 2.2.4 Условия использования по ссылке:

<http://www.videolan.org/legal.html>;

PDF24Creator 8.0.2 Условия использования по ссылке:

https://en.pdf24.org/pdf/lizenz_en_de.pdf;

7zip 16.04 Условия использования по ссылке:

<http://7-zip.org/license.txt>.

Браузер Google Chrome;

Браузер Mozilla Firefox.

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

Интернет-источники: <http://matan.isu.ru>

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Аудитория оборудована специализированной мебелью (столы, стулья, одинарная стеклянная меловая доска) на 20 рабочих мест, и техническими средствами обучения, служащими для представления информации в большой аудитории (мобильный проектор Epson EB-X12, XGA1024*768, ноутбук ASUS X51L IntelCeleron 560, 2.13 GHz., экран).

Наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, обеспечивающие тематические иллюстрации, соответствующие рабочей программе дисциплины.

Компьютерный класс, оборудованный учебной мебелью на 25 посадочных мест, компьютерами: моноблок Hewlett-PackardDualCoreIntelCore i3-3240, 3.40 GHz (25 шт.) с неограниченным доступом к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации; доска для маркеров; мобильный проектор Epson EB-X12, XGA1024*768.

10. Образовательные технологии:

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU, более 20 полнотекстовых версий журналов по тематике курса. Доступ с любого компьютера, подключенного через прокси-сервер Иркутского государственного университета.
2. Электронная библиотека "Труды ученых ИГУ" (<http://ellib.library.isu.ru>). Доступ к полным текстам учебных пособий, монографий и статей сотрудников университета, осуществляемый с любого компьютера сети Иркутского государственного университета.
3. Общероссийский математический портал - информационная система Math-Net.Ru – доступ к российским математическим журналам и обзорам ВИНТИ РАН
4. Журнал "Известия Иркутского университета. Серия Математика". Свободный доступ к электронным полнотекстовым версиям с 2007 г. осуществляется с сайта университета <http://www.isu.ru/izvestia>
5. Архив научных журналов JSTOR (<http://www.jstor.org>). Доступ с любого компьютера, подключенного через прокси-сервер Иркутского государственного университета.

11. Оценочные средства (ОС):

11.1. Оценочные средства для входного контроля - в виде тестов с закрытыми вопросами.

11.2. Оценочные средства текущего контроля.

Формы текущего контроля успеваемости обучающихся - доклады по выбранным темам самостоятельной работы (на каждом втором аудиторном занятии).

Тематика заданий для самостоятельной работы

1. Понятия обобщенной функции, регулярной и сингулярной обобщенной функции, носителя обобщенной функции, равенства двух обобщенных функций.
2. Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях и умножение обобщенных функций.
3. Дифференцирование обобщенных функций.
4. Прямое (тензорное) произведение и свертка обобщенных функций.
5. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
6. Интегральные преобразования обобщенных функций.
7. Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и некоторые специальные факты о конечномерных пространствах.

8. Корректные (равномерно корректные) задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Понятие разрешающего (эволюционного) оператора.

а. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Дисциплина завершается зачетом, на котором проверяется усвоение обучающимися основных понятий и свойств, а также их применение в решении поставленных математических задач в письменной – устной форме с решением задач.

Вопросы к зачету:

1. При всех значениях параметра $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ исследовать на сингулярность обобщенные функции $x^k \cdot P \frac{1}{x^3}$.

2. Найти в $S'(R^1)$ преобразования Фурье обобщенных функций:

а) $P \frac{1}{x}$ и $\text{sign } x$, б) $e^{-a|x|}$ и $\frac{2a}{a^2 + x^2}$, $a > 0$,

в) $\frac{x^n}{n!} e^{-ax} \theta(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, г) $\delta(x - x_0) \pm \delta(x + x_0)$ и $e^{ax} \theta(-x)$.

3. Зная, что $F\left[P \frac{1}{x}\right] = \text{sign } x$, найти в $S'(R^1)$ преобразования Фурье обобщенных функций $P \frac{1}{x^2}$ и $|x|$.

4. Зная, что $F[\theta(x)] = \pi \delta(\xi) + i P \frac{1}{\xi}$, найти в $S'(R^1)$ преобразования Фурье обобщенных функций $x\theta(x)$ и $x^2\theta(x)$.

5. Доказать, что в $D'(R^1)$ следующие предельные равенства:

а) $g_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) + \frac{1}{\varepsilon} \delta(x) \rightarrow \delta'(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$,

б) $f_\varepsilon(x) = \frac{x^2}{2\varepsilon^3} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \rightarrow \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$,

в) $f_\varepsilon(x) = \frac{x}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \rightarrow \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$,

г) $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \rightarrow \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$,

д) $f_\varepsilon(x) = \frac{x^n}{n! \varepsilon^{n+1}} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \rightarrow \delta(x)$, $n \in \mathbb{N}$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

6. Доказать, что в $S'(R^1)$ $f_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x} \theta(x) \rightarrow \theta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

7. Доказать в $D'(R^1)$ равенство $f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x)$, если

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}.$$

8. Найти следующие производные:

а) $(\cos x \theta(x))''$, б) $(x \text{sign } x)''$, в) $\theta^{(m)}(x_0 - x)$,

$$\text{г) } (\sin x \theta(x))'', \quad \text{д) } (e^{ax} \theta(x))'', \quad \text{е) } (\text{sign } x)^{(m)}, \quad \text{ж) } [2x]^{(m)}.$$

Разработчики:

доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений
Е.Ю. Гражданцева

Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.

**Лист согласования, дополнений и изменений
на 2019/2020 учебный год**

К рабочей программе практики ФТД.2 Теория обобщенных функций и ее приложения по направленности программы подготовки кадров высшей квалификации (программы аспирантуры): Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

В рабочую программу практики вносятся следующие дополнения:

Нет дополнений

В рабочую программу практики вносятся следующие изменения:

Нет изменений

Изменения одобрены Ученым советом института математики, экономики и информатики, протокол № 6 от 18.06.2019

Зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений



М.В. Фалалеев