



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

Институт математики и информационных технологий  
Кафедра теории вероятностей и дискретной математики

**«УТВЕРЖДАЮ»**  
Директор ИМИТ ИГУ  
*М. В. Фалалеев*  
**М. В. Фалалеев**  
**«25» мая 2022 г.**



**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**ФТД.02 Практикум по комбинаторике**

Направление подготовки (профилями подготовки)	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль) подготовки	Математика - Информатика
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная

Иркутск 2022 г.

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

**Цели:** Познакомить студентов с различными задачами и методами теории перечисления.

**Задачи:** 1. Освоение студентами основных понятий и методов перечислительной комбинаторики.

2. Приобретение ими навыков решения как теоретических, так и некоторых прикладных задач с использованием комбинаторного аппарата.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина ФТД.02 Практикум по комбинаторике относится к факультативным дисциплинам.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: «Алгебра», «Математический анализ», «Дискретная математика».

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: «Теоретические основы прикладной математики и информатики», «Преподавание в классах с углубленным изучением математики», выполнение ВКР.

## 3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки):

ПК-6 Способен осваивать специальные знания в предметной области и использовать их в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

**знать:** основные понятия перечислительной комбинаторики и методы исследования, основанные на использовании комбинаторного аппарата;

**уметь:** решать как теоретические, так и прикладные задачи;

**владеть:** математическим аппаратом комбинаторного анализа.

## 4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 1 зачетных ед., 36 час.

Форма промежуточной аттестации: зачет.

#### 4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Самост. работа	Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися					
		Лекции	Лаб. занятия	Практ. занятия			
Тема 1 Размещения. Перестановки. Сочетания	6	4		4	0,5	Опрос Проверка ДЗ СР	
Тема 2 Рекуррентные соотношения	6	2		2		Опрос Проверка ДЗ	
Тема 3 Производящие функции	6	2		2	0,5	Опрос Проверка ДЗ	
Тема 4. Обобщенные числа Стирлинга		4		4	1	Опрос Проверка ДЗ	
Тема 5. Комбинаторные таблицы и схемы	6	2		2		Опрос Проверка ДЗ	
Тема 6. Блуждания по целочисленным решеткам	6	2		2		Опрос Проверка ДЗ	
Итого (6 семестр):		16		16	2	зач.	

ДЗ – домашнее задание

СР – самостоятельная работа

#### 4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самост. работы
	Вид самост. работы	Сроки выполнения	Затраты времени		
Тема 1 Размещения. Перестановки. Сочетания	Решение задач	3 неделя	0,5	Проверка задания СР	Осн. лит. [1], [3,4] Доп. лит. [1], [3]
Тема 3 Производящие функции	Решение задач	8 неделя	0,5	Проверка задания	Осн. лит. [1], [3,4] Доп. лит. [2]
Тема 4 Обобщенные числа Стирлинга	Решение задач	10-12 недели	1	Проверка задания	Осн. лит. [1] Доп. лит. [5], [7]
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			2		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)					

#### 4.3. Содержание учебного материала

##### Тема 1. Размещения. Перестановки. Сочетания

Основные правила комбинаторики. Метод включения и исключения. Выборки и упорядочения. Упорядоченные выборки (размещения и перестановки). Неупорядоченные выборки (сочетания). Выбор без возвращения: число размещений, число перестановок, число сочетаний. Бином Ньютона. Выбор с возвращением: число перестановок, число сочетаний. Разбиения и композиции.

## Тема 2. Рекуррентные соотношения

Метод рекуррентных соотношений и его применение. Задачи. Линейные рекуррентные соотношения. Нелинейные рекуррентные соотношения.

## Тема 3. Производящие функции

Обычные производящие функции. Соотношения между обычными производящими функциями. Решение линейных рекуррентных уравнений. Производящие функции и биномиальные коэффициенты. Экспоненциальные производящие функции. Соотношения между обычными и экспоненциальными производящими функциями. Производящие функции для моментов.

## Тема 4. Обобщенные числа Стирлинга

Числа Стирлинга 1-го и 2-го рода. Обобщенные числа Стирлинга. Построение из элементов базы. Рекуррентные соотношения для обобщенных чисел Стирлинга. Производящие функции. Описание вероятностных распределений с помощью обобщенных чисел Стирлинга.

## Тема 5. Комбинаторные таблицы и схемы

Специальные матрицы. Латинские прямоугольники и квадраты. Турнирные задачи. Блок-схемы.

## Тема 6. Блуждания по целочисленным решеткам

Блуждания по одномерным решёткам. Блуждания по целочисленным двумерным и трёхмерным решёткам. Метод траекторий. Принцип отражения

### 4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Тема 1. Размещения. Перестановки. Сочетания	4	Опрос Проверка ДЗ СР	ПК-6
Тема 2. Рекуррентные соотношения	2	Опрос Проверка ДЗ	ПК-6
Тема 3. Производящие функции	2	Опрос Проверка ДЗ	ПК-6
Тема 4. Обобщенные числа Стирлинга	4	Опрос Проверка ДЗ	ПК-6
Тема 5. Комбинаторные таблицы и схемы	2	Опрос Проверка ДЗ	ПК-6
Тема 6. Блуждания по целочисленным решеткам	2	Опрос Проверка ДЗ	ПК-6

### 4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Тема 4. Обобщенные числа Стирлинга	Доказательство утверждений	ПК-6

#### 4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

- закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;
- приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
- формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
- развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;
- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

**Подготовка к лекции.** Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к практическому занятию.** Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к семинарскому занятию.** Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск

дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к коллоквиуму.** Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к контрольной работе.** Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

**Подготовка к зачету.** Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуются делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

**Подготовка к экзамену.** Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

## 5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) основная литература:

1. Кузьмин О.В. Перечислительная комбинаторика: учеб. пособие. – М.: Дрофа, 2005.
2. Кузьмин О.В. Комбинаторные методы решения логических задач: учеб. пособие. – М.: Дрофа, 2006.
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М: ФИМА, МЦНМО, 2006.
4. Комбинаторный анализ: задачи и упражнения / под ред. К.А. Рыбникова / – М.: Наука, 1982.

б) дополнительная литература:

1. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во МГУ, 1985.
2. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. – М.: МЦНМО, 2002.
3. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Иностранная литература, 1963.
4. Сачков В.Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982.
5. Кузьмин О.В. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения / О.В. Кузьмин. – Новосибирск: Наука, 2000.
6. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. – М.: Мир, 1990.
7. Докин В.Н. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений / В.Н. Докин, В.Д. Жуков, Н.А. Колокольникова, О.В. Кузьмин, М.Л. Платонов. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990.

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

<http://iglin.exponenta.ru/gr.html>

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 6.1. Учебно-лабораторное оборудование

### 6.2. Программное обеспечение

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции
Проверка выполнения домашних заданий	1 - 6	ПК-6

## Примеры оценочных средств текущего контроля

### Демонстрационный вариант самостоятельной работы

1. Найдите сумму четырёхзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках следующих 4 цифр:

а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 2, 5; в) 1, 3, 3, 3; г) 1, 1, 4, 4. 2.

2. В группе 6 юношей и 4 девушки. Сколько существует способов для выбора 5 человек, чтобы среди выбранных было не менее 3 юношей?

3. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов, если Б не должен выступать до того, как выступит А?

4. В железнодорожном вагоне 6 свободных мест расположены по ходу поезда и 8 мест – против хода. На станции в вагон входят 7 пассажиров, причём двое отказываются сидеть лицом по ходу поезда и трое – против. Сколько существует способов для 1) выбора мест для размещения вошедших пассажиров, 2) для размещения пассажиров по имеющимся местам?

## 7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

### Список вопросов для промежуточной аттестации:

1. Основные правила комбинаторики.
2. Метод включения и исключения.
3. Выбор с возвращением и без возвращения. Упорядоченные и неупорядоченные выборки
4. Выбор без возвращения. Число размещений
5. Выбор без возвращения. Число перестановок
6. Выбор без возвращения. Число сочетаний
7. Свойства биномиальных коэффициентов. Треугольник Паскаля
8. Бином Ньютона
9. Выбор с возвращением. Число размещений
10. Выбор с возвращением. Число перестановок
11. Выбор с возвращением. Число сочетаний
12. Разбиения и композиции. Число разбиений. Число композиций
13. Определение рекуррентного соотношения
14. Линейные рекуррентные соотношения.
15. Нелинейные рекуррентные соотношения
16. Обычные производящие функции
17. Соотношения между обычными производящими функциями
18. Решение линейных рекуррентных уравнений
19. Экспоненциальные производящие функции
20. Соотношения между обычными и экспоненциальными производящими функциями
21. Производящие функции для моментов
22. Числа Стирлинга 1-го и 2-го рода
23. Обобщенные числа Стирлинга. Построение из элементов базы
24. Рекуррентные соотношения для обобщенных чисел Стирлинга
25. Производящие функции для обобщенных чисел Стирлинга
26. Описание вероятностных распределений с помощью обобщенных чисел Стирлинга



27. Специальные матрицы
28. Латинские прямоугольники и квадраты
29. Турнирные задачи
30. Блок-схемы
31. Блуждания по одномерным решёткам
32. Блуждания по целочисленным двумерным и трёхмерным решёткам
33. Метод траекторий
34. Принцип отражения

### **Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:**

#### **Демонстрационный вариант задания для зачёта**

1. Выбор с возвращением. Число размещений. Привести пример
2. Из 15 лотерейных билетов 2 выигрышных. 1) Сколько существует способов для приобретения 3 билетов? 2) Сколько существует способов, чтобы приобрести 1 выигрышный и 2 билета без выигрыша?
3. Два шахматиста А и Б играют матч из 10 результативных партий (ничьи не засчитываются). Матч закончился победой шахматиста А со счётом 6:4. Сколько существует таких последовательностей исходов результативных партий, чтобы А вёл в счёте в течение всего матча? (Использовать метод траекторий)

Разработчик: **Колокольникова Наталья Арсеньевна**, к.ф.-м.н., доцент