МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Иркутский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)
Институт математики, экономики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
директор института
_________ /Фалалеев М.В./
" 17 " 04 2019г.

Рабочая программа дисциплины

Индекс дисциплины по УП: Б1.В.ДВ.2.2

Наименование дисциплины: Уравнения математической физики и приложения

Направление подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре
01.06.01 Математика и механика

Направленность программы подготовки кадров высшей квалификации (программы аспирантуры): Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление
Форма обучения: очная

Согласовано с УМК ИМЭИ ИГУ
Протокол № 4 от «17» 04 2019 г.

Председатель УМК_______/В.Г. Антоник /

Программа рассмотрена на заседании кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений.
Протокол № 7 от «22» 03 2019г

Зав. кафедрой__________/М.В. Фалалеев /

Иркутск   2019 г.

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины:

В настоящее время математическое моделирование является одним из основных методов решения научных, инженерных, экономических проблем. Основой математических моделей, как правило, являются уравнения математической физики, опыт исследования которых представляет теоретический и практический интерес у специалистов самых разных профессиональных направлений.

Целью преподавания дисциплины «Уравнения математической физики и приложения» является формирование у аспирантов современных теоретических знаний в области методов решения задач математической физики, описывающих некоторые физические процессы, а также практических навыков в их использовании при решении конкретных задач в таких областях науки и деятельности общества, как энергетика, охрана окружающей среды, гидродинамика, теория упругости и др.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина относится к циклу дисциплин по выбору вариативной части дисциплин. Для изучения и освоения дисциплины нужны первоначальные знания из курсов математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории функций комплексных переменных.

Знания и умения, приобретенные аспирантами в результате изучения дисциплины, будут использоваться при изучении курсов математического моделирования, при выполнении диссертационных работ, связанных с решением конкретных задач из механики, физики и т.п.

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций: ПК-1, ПК-2, ПК-3.

В результате изучения дисциплины аспирант должен:

- знать: основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, основные уравнения математической физики и классические задачи для них, понятие обобщенного решения задачи для уравнения с частными производными.

- **уметь**: решать задачи по дисциплине изученными методами и приводить анализ полученного решения; ставить задачи в обобщенной постановке для дифференциальных уравнений, самостоятельно изучать и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами.

- владеть: изученными методами решения задач для уравнений с частными производными.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	**Всего часов / зачетных единиц**	**Курсы**			
			2		
Аудиторные занятия (всего)	36		36		
В том числе:	-	-	-	-	-
Лекции	18		18		
Практические занятия (ПЗ)	18		18		
Самостоятельная работа (всего)	72		72		
В том числе:	-	-	-	-	-
Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к зачету	72		72		
Контактная работа	54		54		
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен и	Зачет с		За-		

др.)	оценкой		чет с оценкой		
Общая трудоемкость часы	108		108		
зачетные единицы	3		3		

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов и тем дисциплины.

№	Наименование раздела	Содержание раздела дисциплины
1	**Введение**	1. Уравнения в частных производных. Понятие решения. Уравнение колебаний струны, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа. 2. Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка. Характеристики. Методы интегрирования. 3. Линейные уравнения второго порядка от 2-х независимых переменных. Приведение к каноническому виду методом характеристик. Классификация. 4. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами от n независимых переменных. Приведение к каноническому виду. Классификация.
2	**Уравнения гиперболического типа**	1. Постановка задачи Коши для уравнения колебаний струны. Вывод формулы Даламбера. 2. Область зависимости (решения от начальных условий). Существование, единственность, непрерывная зависимость от начальных условий решения задачи Коши. 3. Смешанная задача для полуограниченной струны. Решение методом нечетных и четных продолжений (в зависимости от типа краевого условия). 4. Смешанная задача для ограниченной струны. 5. Постановка задачи Коши для гиперболического уравнения. Теорема Ковалевской о единственности и локальной разрешимости задачи Коши для системы Ковалевской в классе аналитических функций (формулировка, доказательство единственности). Пример Адамара, иллюстрирующий, что для уравнений в частных производных, для которых решение задачи Коши существует и единственно, оно не обязательно непрерывно зависит от начальных данных. Пример Ковалевской, иллюстрирующий, что если система не является системой Ковалевской, то решение задачи Коши может не существовать. 6. Понятие характеристического направления и характеристической поверхности. Характеристические направления и поверхности для уравнения колебаний струны, уравнения теплопроводности, уравнения Лапласа, для многомерного волнового уравнения. Постановка обобщенной задачи Коши с данными на нехарактеристической поверхности. Пример, показывающий, что если данные Коши заданы на характеристических поверхностях, решение задачи Коши может не

		существовать или не быть единственным. 7. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения в случае неаналитических коэффициентов и начальных данных. 8. Формула Грина. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера. 9. Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае неаналитических коэффициентов и начальных данных при n = 3. Формула Кирхгофа. Вывод. 10. Метод спуска. Вывод формулы Пуассона из формулы Кирхгофа. Вывод формулы Даламбера из формулы Пуассона. 11. Смешанная задача для уравнения колебаний струны. Решение методом Фурье. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции для различных типов краевых условий, их свойства. Интерпретация решения смешанной задачи. Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны при помощи известных свойств рядов Фурье.
3	**Уравнения параболического типа**	1. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Вывод формулы Пуассона в одномерном случае. Смешанная задача для уравнения теплопроводности и ее решение методом Фурье. 2. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. 3. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в полосе. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. 4. Теорема о стабилизации решения задачи Коши. Теорема об оценке скорости убывании решения в ограниченной области при $t \to \infty$.
4	**Уравнения эллиптического типа**	1. Гармонические функции. Уравнение Лапласа. Некорректность постановки задачи Коши. Постановка задач Дирихле и Неймана в ограниченной области. Радиально симметричные решения уравнения Лапласа. 2. Принцип максимума. Доказательство единственности и непрерывной зависимости от граничных условий решения задачи Дирихле. 3. Лемма о знаке производной гармонической функции в точке минимума. 4. Строгий принцип максимума. Условие разрешимости задачи Неймана. Доказательство единственности решения задачи Неймана с точностью до константы. 5. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Ослабление условий гладкости граничной функции в задаче Дирихле. 6. Теорема о среднем (доказательство для круга). 1-я, 2-я теоремы Харнака. Неравенства Харнака. Теорема Лиувилля. 7. Теорема об аналитичности гармонической функции в R^2. Теорема об устранении особенности гармонических функций. 8. Оценки Бернштейна производных гармонических функ-

		ций. Теорема об аналитичности гармонической функции в R^n. 9. Функция Грина и ее свойства. Фундаментальное решение оператора Лапласа. 10. Внешние краевые задачи Дирихле и Неймана в R^2 и в R^n, $n > 2$ 11. Определение обобщенной производной по Соболеву. Ее свойства. Пространства H^1 и H^1 . Неравенство Фридрихса. 12. Определение операции усреднения, свойства. 13. Вариационный метод. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в H^1.

5.2. Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов и тем данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин (вписываются разработчиком)								
1.	Подготовка диссертационной работы	1	2	3	4					

5.3. Разделы и темы дисциплин (модулей)и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела	Наименование темы	Виды занятий в часах			
			Лекц.	Практ. зан.	СРС	Всего
1.	Введение	1. Уравнения в частных производных. Понятие решения. Уравнение колебаний струны, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа. 2. Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка. Характеристики. Методы интегрирования. 3. Линейные уравнения второго порядка от 2-х независимых переменных. Приведение к каноническому виду методом характеристик. Классификация. 4. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами от n независимых переменных. Приведение к каноническому виду. Классификация**.**	4	2	18	24
2.	Уравнения гиперболического типа	1. Постановка задачи Коши для уравнения колебаний струны. Вывод формулы Даламбера. 2. Область зависимости (решения от начальных условий). Существование, единственность, непрерывная зависимость от начальных условий решения задачи Коши. 3. Смешанная задача для полуограниченной струны. Решение методом нечетных и четных продолжений (в зависимо-	4	6	18	28

		сти от типа краевого условия). 4. Смешанная задача для ограниченной струны. 5. Постановка задачи Коши для гиперболического уравнения. Теорема Ковалевской о единственности и локальной разрешимости задачи Коши для системы Ковалевской в классе аналитических функций (формулировка, доказательство единственности). Пример Адамара, иллюстрирующий, что для уравнений в частных производных, для которых решение задачи Коши существует и единственно, оно не обязательно непрерывно зависит от начальных данных. Пример Ковалевской, иллюстрирующий, что если система не является системой Ковалевской, то решение задачи Коши может не существовать. 6. Понятие характеристического направления и характеристической поверхности. Характеристические направления и поверхности для уравнения колебаний струны, уравнения теплопроводности, уравнения Лапласа, для многомерного волнового уравнения. Постановка обобщенной задачи Коши с данными на нехарактеристической поверхности. Пример, показывающий, что если данные Коши заданы на характеристических поверхностях, решение задачи Коши может не существовать или не быть единственным. 7. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения в случае неаналитических коэффициентов и начальных данных. 8. Формула Грина. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера. 9. Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае неаналитических коэффициентов и начальных данных при n = 3. Формула Кирхгофа. Вывод. 10. Метод спуска. Вывод формулы Пуассона из формулы Кирхгофа. Вывод формулы Даламбера из формулы Пуассона. 11. Смешанная задача для уравнения колебаний струны. Решение методом Фурье. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции для различных типов краевых условий, их свойства. Интерпретация решения смешанной				

		задачи. Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны при помощи известных свойств рядов Фурье.				
3.	Уравнения параболического типа	5. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Вывод формулы Пуассона в одномерном случае. Смешанная задача для уравнения теплопроводности и ее решение методом Фурье. 6. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. 7. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в полосе. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. 8. Теорема о стабилизации решения задачи Коши. Теорема об оценке скорости убывании решения в ограниченной области при $t \to \infty$.	4	6	18	28
4.	Уравнения эллиптического типа	1. Гармонические функции. Уравнение Лапласа. Некорректность постановки задачи Коши. Постановка задач Дирихле и Неймана в ограниченной области. Радиально симметричные решения уравнения Лапласа. 2. Принцип максимума. Доказательство единственности и непрерывной зависимости от граничных условий решения задачи Дирихле. 3. Лемма о знаке производной гармонической функции в точке минимума. 4. Строгий принцип максимума. Условие разрешимости задачи Неймана. Доказательство единственности решения задачи Неймана с точностью до константы. 5. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Ослабление условий гладкости граничной функции в задаче Дирихле. 6. Теорема о среднем (доказательство для круга). 1-я, 2-я теоремы Харнака. Неравенства Харнака. Теорема Лиувилля. 7. Теорема об аналитичности гармонической функции в R^2. Теорема об устранении особенности гармонических функций. 8. Оценки Бернштейна производных гармонических функций. Теорема об аналитичности гармонической функции в R^n. 9. Функция Грина и ее свойства. Фундаментальное решение оператора Лапласа. 10. Внешние краевые задачи Дирихле и	6	4	1 18	28

		Неймана в R^2 и в R^n, n> 2 11.Определение обобщенной производной по Соболеву. Ее свойства. Пространства H^1 и H^1 . Неравенство Фридрихса. 12.Определение операции усреднения, свойства. 13.. Вариационный метод. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в H1				

5.4. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

№ п/п	**№ раздела и темы дисциплины**	Наименование семинаров, практических и лабораторных работ	Трудоемкость (часы)	Оценочные средства	Формируемые компетенции
1.	**1**	1.Линейные уравнения второго порядка от 2-х независимых переменных. Приведение к каноническому виду методом характеристик. Классификация.	1	Отчет по индивидуальным заданиям. Проверка домашних работ.	ПК-1, ПК-2, ПК-3.
		2.Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами от n независимых переменных. Приведение к каноническому виду. Классификация.	1		
2.	**2**	1. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера.	2	Отчет по индивидуальным заданиям. Проверка домашних работ.	ПК-1, ПК-2, ПК-3.
		2. Задача Коши для общего уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными и ее решение методом характеристик	2		
		3. Смешанная задача для уравнения колебаний струны. Решение методом Фурье.	2		
3.	**3**	1. Задача Коши для уравнения теплопроводности.	2	Отчет по индивидуальным за-	ПК-1, ПК-2, ПК-3.

		2. Смешанная задача для уравнения теплопроводности и ее решение методом Фурье	4	даниям. Проверка домашних работ.	
4.	**4**	1. Гармонические функции. Уравнение Лапласа.	1	Отчет по индивидуальным заданиям	ПК-1, ПК-2, ПК-3.
		2. Решение задачи Дирихле для круга и кругового сектора методом Фурье	3		

6. Примерная тематика рефератов, докладов, проектов (при наличии); перечень вопросов к зачетам, экзаменам и т.п.:

Вопросы к зачету:

1. Классификация уравнений и систем с частными производными первого порядка.
2. Задача Коши для уравнений и систем с частными производными первого порядка.
3. Теорема Коши-Ковалевской
4. Начально-краевые задачи для уравнений и систем с частными производными первого порядка.
5. Градиентная катастрофа и ее физический смысл.
6. Системы гиперболического типа, их приведение к стандартному виду.
7. Инварианты Римана.
8. Характеристики
9. Модель газовой динамики
10. Вывод системы дифференциальных уравнений газовой динамики из интегральных законов сохранения.
11. Сильные и слабые разрывы в газовых течениях
12. Ударные волны, их свойства
13. Специальные модели движения газа

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:

а) основная литература

1. **Сидоров, Денис Николаевич.** Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения [Текст] / Д. Н. Сидоров ; рец.: В. К. Горбунов, А. Лоренци, В. С. Сизиков ; ред. М. В. Фалалеев ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т математики, экономики и информатики. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. - 293 с. 34 экз.

2. **Кузнецов, Павел Александрович.** Аналитические решения начально-краевых задач с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности [Текст] / П. А. Кузнецов, А. Л. Казаков ; рец.: Г. В. Демиденко, Г. А. Рудых ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т мат., эконом. и информ. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2014. - 99 с. 19 экз.

3. **Леонтьев, Роман Юрьевич**. Нелинейные уравнения в банаховых пространствах с векторным параметром в нерегулярных случаях/ Р. Ю Леонтьев ; рец.: А. П. Казаков, Н. А. Сидоров; Иркутский гос. ун-т, Ин-т математики, экономики и информатики. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 101 с. 21 экз.

4. **Гражданцева, Елена Юрьевна**. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах/ Е. Ю. Гражданцева ; рец.: М. В. Фалалеев, Г. А. Свиридюк; Иркутский гос. ун-т. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 91. 25 экз.

5. **Орлов, Сергей Сергеевич**. Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах/ С. С. Орлов ; рец.: А. Л. Казаков, Д. Н. Сидоров; Иркут. гос. ун-т, Ин-т математики, экономики и информатики. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – 149 с. 17 экз.

б) дополнительная литература

1. **Ковеня, Виктор Михайлович**. Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики/ В. М. Ковеня ; отв. ред. Ю. И. Шокин; СО РАН, Ин-т выч. технологий. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. – 280 с.2 экз.

в) программное обеспечение – не предусмотрено

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

Интернет-источники: http://matan.isu.ru

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа на 40 рабочих мест, оборудованная специализированной (учебной) мебелью; доска для мела, оборудованием для презентации учебного материала: стационарный проектор Casio XJ-V1, XGA1024*768; ноутбук ASUS X51L Intel Celeron 560, 2.13 GHz.

9. Образовательные технологии:

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU, более 20 полнотекстовых версий журналов по тематике курса. Доступ с любого компьютера, подключенного через прокси-сервер Иркутского государственного университета.
2. Электронная библиотека "Труды ученых ИГУ" (http://ellib.library.isu.ru). Доступ к полным текстам учебных пособий, монографий и статей сотрудников университета, осуществляемый с любого компьютера сети Иркутского государственного университета.
3. Общероссийский математический портал - информационная система Math-Net.Ru – доступ к российским математическим журналам и обзорам ВИНИТИ РАН
4. Журнал "Известия Иркутского университета. Серия Математика". Свободный доступ к электронным полнотекстовым версиям с 2007 г. осуществляется с сайта университета http://www.isu.ru/izvestia
5. Архив научных журналов JSTOR (http://www.jstor.org). Доступ с любого компьютера, подключенного через прокси-сервер Иркутского государственного университета.

10. Фонды оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

10.1 Оценочные средства текущего контроля:

Формы текущего контроля успеваемости студентов – отчет по индивидуальным заданиям по каждой теме.

Примеры индивидуальных заданий:

№1

1. Определить тип уравнения:
   1. $U_{xx} + 6U_{xy} + U_{yy} + U_x + U_y - 3U = 0$
   2. $3U_{xx} - 4U_{xy} + 2U_{yy} + 4U_x + 2U - xy = 0$
   3. $4U_{xx} - 12U_{xy} + 9U_{yy} + U_x - \sin x + 2 = 0$
   4. $U_{xx} + 4U_{xy} + 5U_{yy} + 5U_{zz} - 4U_{xz} - 6U_{yz} + U_x - x^2U = 0$

5. $10U_{xx} + 4U_{xy} + U_{yy} + 3U_{zz} - 6U_{xz} - 4U_{yz} + U - xzy^2 = 0$
6. $U_{xy} - 3U_{xz} + 2U_{yz} + 3U_x - U + 2x = 0$
7. $U_{xx} + 2U_{xz} - 2U_{xt} + U_{yy} + 2U_{zz} + 2U_{yz} + 2U_{yt} + 2U_{tt} = 0$
8. $4U_{xx} + 6U_{xy} + 2U_{yy} + U_{yz} + 2U_{yt} + 2U_{tt} + 5U_z - U = 0$
9. $2U_{xy} - 2U_{xz} + 2U_{yz} + 3U - U = 0$
10. $U_{xx} + 4U_{xy} + 2U_{xz} + 4U_{yy} + U_{zz} - 2xyU_x + 3xU = 0$
11. $3U_{xx} + 4U_{yy} + 5U_{zz} + 4U_{xy} - 4U_{yz} + x - U_y + xye^z = 0$
12. $U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + 2U_x + xy^2 = 0$

2. Вдоль соответствующих решений $U(x, y)$ определить тип уравнений:

13. $U_{xx}^3 - 4U_{xy}^2 + 7U_{yy} + U_y + 6x - 4y = 0,\ U = \frac{1}{2}x^2 + xy.$
14. $U_{xx}^2 - 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2 + 2U_x - 2x = 0,\ U = \frac{1}{2}(x + y)^2.$
15. $U_{xy}^2 + U_{xx}U_{yy} + U_{yy}^2 + 2U_{xx} + 2U_{yy} + 1 = 0,\ U_1 = x^2 + y^2,\ U_2 = x.$
16. $U_{xx}^2 U_{xy} - 5U_{yy} - U_x - 2(x + y) - 9 = 0,\ U = x^2 + 2xy.$

3. Определить тип систем:

17. $\begin{cases} U_x + 2V_x - U_y + 3V_y + 2V = 0 \\ 2U_x - 3V_x + U_y + 2V - V_y + U = 0 \end{cases}$
18. $\begin{cases} U_x - V_y + 2U_z - 3V_z + U = 0 \\ U_y + 2V_x + 2U_z + V_y + 2V = 0 \end{cases}$
19. $\begin{cases} V_x + 12U_y + V_y + 3U - 32xe^y = 0 \\ -5U_x + \frac{5}{6}V_x + U_y + V_y - e^x U = 0 \end{cases}$
20. $\begin{cases} 15U_x + 9V_x + 17V_y + 12U_y - 3x\cos y = 0 \\ 3U_x + 2U_x + V_y - 6U = 0 \end{cases}$

4. В зависимости от α определить тип систем:

21. $\begin{cases} U_y - \alpha V_x + 2V_y = 0 \\ U_x + \alpha V_y - U = 0 \end{cases}$
22. $\begin{cases} U_x - \alpha V_x + 2V_y = 0 \\ \alpha U_x + V_y + 2U = 0 \end{cases}$

№2

1. Привести к каноническому виду уравнение:
   а) $U_{xx} - 2U_{xy} - 3U_{yy} + U_y = 0.$
   б) $4xU_{xx} + yU_{yy} - 2U_y = 0.$
2. Привести к каноническому виду и упростить группу младших производных:

$$U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 4U_x - 3U_y - 7U = 0.$$

№3

Привести к каноническому виду уравнения и, если возможно, упростить группу младших производных:

1. $y^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + y u_y = 0$
2. $3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0$
3. $u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y - 6u_z = 0$

№4

Задача 1

Однородная бесконечная струна возбуждена начальным отклонением, имеющим форму полуокружности $u(x,0) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1.$ Начальные скорости отсутствуют. Начертите положение струны для моментов времени $t = 1/2, t = 1, t = 2,$ считая для простоты $a = 1$.

Задача 2.

Решить задачи Коши

$$a) \quad u_{tt} = u_{xx} \quad u(x,0) = 1/(1 + x^2), \quad u_t(x,0) = 0$$

$$b) \quad u_{tt} = 2u_{xx} \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = xe^{-x^2/2}$$

№5

Решить задачи:

1
$$u_{tt} = 16u_{xx};$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=8} = 0;$$
$$u|_{t=0} = 31\sin \pi x; \quad u_t|_{t=0} = 4\pi \sin \pi x.$$

2.1
$$u_{tt} = 9u_{xx};$$
$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2} = 0;$$
$$u|_{t=0} = 8\cos 4\pi x; \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

3.1
$$u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u;$$
$$u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0;$$
$$u|_{t=0} = 10\cos\frac{3x}{2}; \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

№6

1. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге $0 \le r < 6, 0 \le \varphi < 2\pi$:

$\Delta u = 0$

$u(6,\varphi) = 7\cos\varphi + 8\sin 12\varphi$

2. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга $0 \le r < 14, 0 \le \varphi < 2\pi$:

$\Delta u = 0$

$u(14,\varphi) = 23\cos 5\varphi + \sin 8\varphi$

Критерии оценивания:

Оценка «отлично» выставляется если аспирант полностью и правильно решает поставленную перед ним задачу, математически грамотно обосновывает выбранный для решения способ и правильно интерпретирует полученный результат.

Оценка «хорошо» выставляется если аспирант не полностью и правильно решает поставленную перед ним задачу и математически грамотно обосновывает выбранный для решения способ.

Оценка «удовлетворительно» выставляется если аспирант не полностью и правильно решает поставленную перед ним задачу.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется если аспирант не правильно решает поставленную перед ним задачу, не может обосновывает выбранный для решения способ и не может правильно интерпретировать полученный результат.

10.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации:

Дисциплина завершается зачетом с оценкой, на котором проверяется усвоение студентами основных понятий и свойств, а также их применение в решении поставленных математических задач в письменно – устной форме с решением задач.

Примерные практические задания:

1. Построить решение начально-краевой задачи при $t \ge 0, 0 \le x \le b$:

$$\begin{cases} u_{tt} = a u_{xx}, \\ u|_{t=0} = f(x), u|_{x=0} = g(t), u|_{x=b} = h(t), \\ f(0) = g(0), f(b) = h(0). \end{cases}$$

2. Построить решение начально-краевой задачи при $t \ge 0, x \ge 0$:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \\ u|_{t=0} = 1, u|_{x=0} = g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

3. Построить решение начально-краевой задачи при $t \ge 0, x \ge 0$:

$$\begin{cases} u_t + u u_x = 0, \\ u|_{t=0} = 1, u|_{x=0} = g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Оценка «отлично» выставляется если экзаменуемый знает основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, основные уравнения математической физики и классические задачи для них, понятие обобщенного решения задачи для уравнения с частными производными, владеет изученными методами решения задач и умеет решать задачи по дисциплине изученными методами и приводить анализ полученного решения; ставить задачи в обобщенной постановке для дифференциальных уравнений, самостоятельно изучать и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «отлично» или хорошо» в текущем контроле.

Оценка «хорошо» выставляется если экзаменуемый знает основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, и умеет решать задачи по дисциплине изученными методами и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «хорошо» или «удовлетворительно» в текущем контроле.

Оценка «удовлетворительно» выставляется если экзаменуемый знает основные понятия и определения, умеет понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «удовлетворительно» в текущем контроле.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется если экзаменуемый не знает основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, основные уравнения математической физики и классические задачи для них, понятие обобщенного решения задачи для уравнения с частными производными, не владеет изученными методами решения задач и не умеет решать задачи по дисциплине изученными методами и приводить анализ полученного решения; ставить задачи в обобщенной постановке для дифференциальных уравнений, самостоятельно изучать и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «неудовлетворительно» в текущем контроле.

Разработчики:
Профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений М.В.Фалалеев
Доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Е.А. Головко
Доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Е.Ю. Гражданцева