



**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«Иркутский государственный университет»**  
**(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**  
Институт математики, экономики и информатики

**УТВЕРЖДАЮ**  
директор института  
*М.В. Фалалеев* / Фалалеев М.В./  
" 17 " 04 2019г.

**Рабочая программа дисциплины**

Индекс дисциплины по УП: Б1.В.ДВ.2.1

Наименование дисциплины: Теория дифференциальных уравнений и приложения

Направление подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре  
01.06.01 Математика и механика

Направленность программы подготовки кадров высшей квалификации (программы аспирантуры): Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Форма обучения: очная

Согласовано с УМК ИМЭИ ИГУ  
Протокол № 4 от « 17 » 04 2019 г.

Председатель УМК *В.Г. Антоник* /В.Г. Антоник /

Программа рассмотрена на заседании  
кафедры математического анализа и  
дифференциальных уравнений.

Протокол № 4 от « 22 » 03 2019г

Зав. кафедрой *М.В. Фалалеев* /М.В. Фалалеев /

Иркутск 2019 г.

## Содержание

1. Цели и задачи дисциплины (модуля)
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП.
3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной работы
5. Содержание дисциплины (модуля)
  - 5.1 Содержание разделов и тем дисциплины (модуля)
  - 5.2 Разделы дисциплины (модуля) и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами (модулями)
  - 5.3 Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий
  - 5.4 Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ.
6. Примерная тематика рефератов (при наличии)
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):
  - а) основная литература;
  - б) дополнительная литература;
  - в) программное обеспечение;
  - г) интернет-ресурсы, базы данных, информационно-справочные и поисковые системы
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля).
9. Образовательные технологии
10. Фонды оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации
  - 10.1 Оценочные средства текущего контроля
  - 10.2 Оценочные средства для промежуточной аттестации

### 1. Цели и задачи дисциплины:

В настоящее время математическое моделирование является одним из основных методов решения научных, инженерных, экономических проблем. Основой математических моделей, как правило, являются уравнения математической физики, опыт исследования которых представляет теоретический и практический интерес у специалистов самых разных профессиональных направлений.

Целью преподавания дисциплины «Теория дифференциальных уравнений и приложения» является формирование у аспирантов современных теоретических знаний в области методов решения задач математической физики, описывающих некоторые физические процессы, а также практических навыков в их использовании при решении конкретных задач в таких областях науки и деятельности общества, как энергетика, охрана окружающей среды, гидродинамика, теория упругости и др.

### 2. Место дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина относится к циклу дисциплин по выбору вариативной части дисциплин. Для изучения и освоения дисциплины нужны первоначальные знания из курсов математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории функций комплексных переменных.

Знания и умения, приобретенные аспирантами в результате изучения дисциплины, будут использоваться при изучении курсов математического моделирования, при выполнении диссертационных работ, связанных с решением конкретных задач из механики, физики и т.п.

### 3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций: ПК-1, ПК-2, ПК-3.

В результате изучения дисциплины аспирант должен:

**Знать:** основные понятия, определения и методы решений дифференциальных уравнений, постановки задач и свойства их решений.

**Уметь:** формулировать и доказывать основные теоремы теории дифференциальных уравнений, применять методы решения дифференциальных уравнений и их систем.

**Владеть:** математическим аппаратом дифференциальных уравнений и применять его при исследовании математических моделей практических задач

### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов / зачетных единиц	Курсы			
		1	2	3	4
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	36		36		
В том числе:	-	-	-	-	-
Лекции	18		18		
Практические занятия (ПЗ)	18		18		
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	72		72		
В том числе:	-	-	-	-	-
Подготовка доклада	20		20		
Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к зачету	40		40		
<b>Контактная работа</b>	54		54		
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен и др.)	Зачет с оценкой		Зачет с оценкой		

			й		
Общая трудоемкость	часы	108	108		
	зачетные единицы	3	3		

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Содержание разделов и тем дисциплины.

№	Наименование раздела	Содержание раздела дисциплины
1	<b>Дифференциальные уравнения и их классификация</b>	Тема 1.1 Основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения и их классификация. Системы дифференциальных уравнений. Уравнения с частными производными. Тема 1.2. Прикладные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Радиоактивный распад. Движение материальной точки. Процесс теплопереноса.
2	<b>Методы решения уравнений первого порядка</b>	Тема 2.1. Предварительный анализ уравнений. Поле направлений и изоклины. Уравнения первого порядка. Общая характеристика. Геометрический смысл уравнения. Тема 2.2. Элементарные методы интегрирования.. Метод разделения переменных. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным. Линейные уравнения. Уравнения, приводящиеся к линейным. Тема 2.3. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Тема 2.4. Нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка и методы их решения. Общие замечания о нелинейных уравнениях. Уравнения, не содержащие одной из переменных. Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа. Уравнения Клеро. Способы построения особого решения. Уравнение Риккати. Свойства решений уравнений Риккати.
3	<b>Основы теории уравнений высших порядков</b>	Тема 3.1. Уравнения высших порядков. Основные определения. Уравнения высших порядков. Основные определения. Уравнения, решаемые в квадратурах. Тема 3.2. Решение линейных однородных уравнений высших порядков. Общие свойства однородных уравнений. Решение линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Тема 3.3. Решение линейных неоднородных уравнений. Структура общего решения и построение частного решения. Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами.

		<p>Тема 3.4. Уравнения второго порядка. Функция Грина. Краевая задача и функция Грина. Краевая задача для неоднородного уравнения. Проблема собственных значений и интегральные уравнения.</p> <p>Тема 3.5. Аналитические решения уравнения второго порядка.</p> <p>Уравнения с колеблющимися решениями. Интегрирование уравнения с помощью степенных рядов.</p> <p>Тема 3.6. Уравнения, допускающие понижение порядка.</p>
4	<b>Системы дифференциальных уравнений</b>	<p>Тема 4.1. Системы линейных уравнений.</p> <p>Основные понятия и определения. Системы линейных однородных уравнений. Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Системы линейных неоднородных уравнений.</p> <p>Тема 4.2. Теорема существования и единственности решения.</p> <p>Теорема Коши. Зависимость решения от параметров.</p> <p>Тема 4.3. Нелинейные системы уравнений первого порядка. Основные свойства системы в нормальной форме. Фазовое пространство и фазовые траектории. Понижение порядка системы с помощью первых интегралов. Симметричная форма системы уравнений. Точки покоя системы второго порядка. Классификация особых точек.</p>
5	<b>Матричные дифференциальные уравнения</b>	<p>Тема 5.1. Матричные уравнения.</p> <p>Перестановочные матрицы. Решение линейного неоднородного уравнения. Скалярное уравнение. Полиномиальное уравнение. Уравнение с жордановой особенной матрицей.</p> <p>Линейное дифференциальное уравнение. Матричное дифференциальное уравнение Риккати.</p> <p>Тема. 5.2. Уравнение Риккати в методе прогонки.</p> <p>Краевая задача для скалярного дифференциального уравнения. Краевая задача для векторного дифференциального уравнения.</p> <p>Тема 5.3. Уравнение Риккати в теории управления.</p> <p>Задача об аналитическом конструировании регуляторов и об оптимальной стабилизации. Оптимальный фильтр Каллмана-Бьюси.</p>
6	<b>Периодические решения нелинейных систем дифференциальных уравнений</b>	<p>Тема 6.1. Периодические решения автономных нелинейных систем.</p> <p>Периодические решения квазилинейных автономных систем. Метод А.Н. Крылова. Метод гармонической линеаризации.</p> <p>Тема 6.2. Вынужденные колебания нелинейных систем. Метод Пуанкаре. Особый случай.</p>
7	<b>Уравнения с разрывной правой частью</b>	<p>Тема 7.1 Уравнения с правой частью, разрывной по <math>t</math>.</p> <p>Уравнения Каратеодори. Свойства решений. Линейные уравнения.</p>

		Тема 7.2. Уравнения с разрывной правой частью.
8	<b>Устойчивость</b>	Тема 8.1. Устойчивость по Ляпунову. Устойчивость линейных систем. Основные определения. Общие теоремы об устойчивости линейных стационарных и нестационарных систем. Тема 8.2. Критерий устойчивости. Критерий Гурвица. Область устойчивости. Критерий Михайлова. Тема 8.3. Устойчивость нелинейных систем. Функции Ляпунова. Теоремы Ляпунова. Обобщение теорем Ляпунова. Устойчивость по первому приближению.
9	<b>Уравнения с частными производными первого порядка</b>	Тема 9.1. Линейные однородные уравнения первого порядка. Общее решение. Задача Коши. Тема 9.2. Квазилинейные уравнения. Задача Коши для уравнения с двумя независимыми переменными. Тема 9.3. Системы двух уравнений первого порядка. Условия разрешимости. Построение решения. Тема 9.4. Уравнение Пфаффа.

### 5.2. Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов и тем данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин (вписываются разработчиком)
1.	Подготовка диссертационной работы	1 – 9

### 5.3. Разделы и темы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела	Наименование темы	Виды занятий в часах					Всего
			Лекц.	Практ. зан.	Семина	Лаб. зан.	СРС	
1.	Раздел 1	Раздел 1	1	1			4	6
2.	Раздел 2	2.1 – 2.4	1	1			5	7
3.	Раздел 3	3.1 – 3.3	1	1			5	7
4.	Раздел 3	3.4 – 3.6	2	2			5	9
5.	Раздел 4	4.1, 4.2	1	1			6	8
6.	Раздел 4	4.3	2	2			6	10
7.	Раздел 5	5.1, 5.2, 5.3	2	2			7	11
8.	Раздел 6	6.1, 6.2	2	2			7	11
9.	Раздел 7	7.1, 7.2	2	2			7	11

10.	Раздел 8	8.1, 8.2, 8.3	2	2			6	10
11.	Раздел 9	9.1, 9.2, 9.3	1	1			6	8
12.	Раздел 9	9.4	1	1			7	8

#### 5.4. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

№ п/п	№ раздела и темы дисциплины	Наименование семинаров, практических и лабораторных работ	Трудоемкость (часы)	Оценочные средства	Формируемые компетенции
1	2	3	4	5	6
1.	Раздел 1 Тема 1.2	Прикладные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.	1	Текущ. контроль, тестирование	ПК-1 ПК-3
2.	Раздел 2. Тема 2.4	Способы построения особого решения. Уравнение Риккати.	1		ПК-1 ПК-3
3.	Раздел 3. Тема 3.3	Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами.	1		ПК-1 ПК-3
4	Раздел 3 Тема 3.4	Краевая задача и функция Грина. Краевая задача для неоднородного уравнения. Проблема собственных значений и интегральные уравнения.	2		ПК-1 ПК-3
5	Раздел 4 Тема 4.2	Теорема Коши. Зависимость решения от параметров.	1		ПК-1 ПК-2
6	Раздел 4 Тема 4.3	Точки покоя системы второго порядка. Классификация особых точек.	2		ПК-1 ПК-3
7	Раздел 5 Тема 5.3	Задача об аналитическом конструировании регуляторов и об оптимальной стабилизации. Оптимальный фильтр Каллмана-Бьюси.	2		ПК-1 ПК-2
8	Раздел 6 Тема 6.1	Метод гармонической линеаризации.	2		ПК-1 ПК-2

9	Раздел 7 Тема 7.2	Уравнения с разрывной правой частью.	2		ПК-1 ПК-2
10	Раздел 8 Тема 8.3	Функции Ляпунова. Устойчивость по первому приближению.	2		ПК-1 ПК-2
11	Раздел 9 Тема 9.1	Общее решение. Задача Коши.	1		ПК-1 ПК-3
12	Раздел 9 Тема 9.4	Уравнение Пфаффа.	1		ПК-1 ПК-3

**6. Примерная тематика рефератов, докладов, проектов (при наличии); перечень вопросов к зачетам, экзаменам и т.п.:**

**Темы докладов:**

1. Прикладные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Точки покоя системы второго порядка. Классификация особых точек.
3. Задача об аналитическом конструировании регуляторов и об оптимальной стабилизации. Оптимальный фильтр Каллмана-Бьюси.
4. Метод гармонической линеаризации.

**Вопросы к зачету:**

1. Дифференциальные уравнения и их классификация. Системы дифференциальных уравнений. Уравнения с частными производными.
2. Прикладные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
3. Предварительный анализ уравнений. Поле направлений и изоклины.
4. Структура общего решения и построение частного решения. Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами.
5. Уравнения с колеблющимися решениями. Интегрирование уравнения с помощью степенных рядов.
6. Основные свойства системы в нормальной форме. Фазовое пространство и фазовые траектории. Понижение порядка системы с помощью первых интегралов. Симметричная форма системы уравнений. Точки покоя системы второго порядка. Классификация особых точек.
7. Матричные уравнения.
8. Уравнение Риккати в методе прогонки.  
Краевая задача для скалярного дифференциального уравнения. Краевая задача для векторного дифференциального уравнения.
9. Уравнение Риккати в теории управления.
10. Задача об аналитическом конструировании регуляторов и об оптимальной стабилизации. Оптимальный фильтр Каллмана-Бьюси.
11. Периодические решения автономных нелинейных систем.
12. Периодические решения квазилинейных автономных систем. Метод А.Н. Крылова. Метод гармонической линеаризации.
13. Вынужденные колебания нелинейных систем.
14. Метод Пуанкаре. Особый случай.
15. Уравнения с правой частью, разрывной по  $t$ .
16. Устойчивость по Ляпунову. Устойчивость линейных систем.
17. Устойчивость нелинейных систем.



18. Уравнения с частными производными первого порядка.

### **7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:**

а) основная литература

1. **Филиппов, Алексей Федорович.** Введение в теорию дифференциальных уравнений [Текст] : учеб. для студ. вузов по группе физ.-мат. напр. и спец. / А. Ф. Филиппов. - Изд. стер. - М. : Ленанд, 2015. - 239 с. - ISBN 978-5-9710-1499-7. 50 экз.

б) дополнительная литература

1. **Краснов, Михаил Леонтьевич.** Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : задачи и примеры с подробными решениями: Учеб. пособие для студ. вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. - 5-е изд., испр. - М. : КомКнига, 2005. - 253 с. - ISBN 5-484-00193-5. 40 экз.

2. **Треногин, Владилен Александрович.** Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В. А. Треногин. - М. : Физматлит, 2009. - 311 с. - ISBN 978-5-9221-1063-1. 50 экз.

3. **Филиппов, Алексей Федорович.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] : учеб. пособие / А. Ф. Филиппов. - 4-е изд. - М. : Либроком, 2011. - 237 с. - ISBN 978-5-397-02914-8. 29 экз.

в) программное обеспечение

1. MS Excel (версия 2007 или выше)
2. Python (версия 2.7 или 3.x)

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

1. <https://isu.bibliotech.ru> — электронно-библиотечная система ИГУ
2. <http://e.lanbook.com> — электронно-библиотечная система ЛАНБ
3. <http://rucont.ru> — электронная библиотека РУКОНТ
4. <http://ibooks.ru> — электронно-библиотечная система ibooks
5. <http://e-library.ru> — научная электронная библиотека eLIBRARY
6. <http://educa.isu.ru> — образовательный портал ИГУ

### **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа на 40 рабочих мест, оборудованная специализированной (учебной) мебелью; доска для мела, оборудованием для презентации учебного материала: стационарный проектор Casio XJ-V1, XGA1024\*768; ноутбук ASUS X51L Intel Celeron 560, 2.13 GHz.

### **9. Образовательные технологии:**

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU, более 20 полнотекстовых версий журналов по тематике курса. Доступ с любого компьютера, подключенного через прокси-сервер Иркутского государственного университета.
2. Электронная библиотека "Труды ученых ИГУ" (<http://ellib.library.isu.ru>). Доступ к полным текстам учебных пособий, монографий и статей сотрудников университета, осуществляемый с любого компьютера сети Иркутского государственного университета.
3. Общероссийский математический портал - информационная система Math-Net.Ru – доступ к российским математическим журналам и обзорам ВИНТИ РАН
4. Журнал "Известия Иркутского университета. Серия Математика". Свободный доступ к электронным полнотекстовым версиям с 2007 г. осуществляется с сайта университета <http://www.isu.ru/izvestia>

5. Архив научных журналов JSTOR (<http://www.jstor.org>). Доступ с любого компьютера, подключенного через прокси-сервер Иркутского государственного университета.

## **10. Фонды оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

### **10.1 Оценочные средства текущего контроля:**

Формы текущего контроля успеваемости студентов – доклад на выбранную тему.

#### **Примеры индивидуальных заданий:**

Критерии оценивания:

Оценка «зачтено» выставляется если аспирант написал доклад в установленные для этого сроки, в котором полностью и правильно раскрыл выбранную им тему и сделал сообщение.

Оценка «незачтено» выставляется если аспирант не сделал доклада.

### **10.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации:**

Дисциплина завершается зачетом с оценкой, на котором проверяется усвоение студентами основных понятий и свойств, а также их применение в решении поставленных математических задач в письменной – устной форме с решением задач.

#### **Примерные практические задания:**

1. Построить решение начально-краевой задачи при  $t \geq 0, 0 \leq x \leq b$  :

$$\begin{cases} u_t = a u_{xx}, \\ u|_{t=0} = f(x), u|_{x=0} = g(t), u|_{x=b} = h(t), \\ f(0) = g(0), f(b) = h(0). \end{cases}$$

2. Построить решение начально-краевой задачи при  $t \geq 0, x \geq 0$  :

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \\ u|_{t=0} = 1, u|_{x=0} = g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

3. Построить решение начально-краевой задачи при  $t \geq 0, x \geq 0$  :

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u|_{t=0} = 1, u|_{x=0} = g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Критерии оценивания:

Оценка «отлично» выставляется если экзаменуемый знает основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, основные уравнения математической физики и классические задачи для них, владеет изученными методами решения задач и умеет решать задачи по дисциплине изученными методами и приводить анализ полученного решения; ставить задачи в обобщенной постановке для дифференциальных уравнений, самостоятельно изучать и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «зачтено» в текущем контроле.

Оценка «хорошо» выставляется если экзаменуемый знает основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, и умеет решать задачи по дисциплине изученными методами и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «зачтено» в текущем контроле.

Оценка «удовлетворительно» выставляется если экзаменуемый знает основные понятия и определения, умеет понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «зачтено» в текущем контроле.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется если экзаменуемый не знает основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, основные уравнения математической физики и классические задачи для них, понятие обобщенного решения задачи для уравнения с частными производными, не владеет изученными методами решения задач и не умеет решать задачи по дисциплине изученными методами и приводить анализ полученного решения; ставить задачи в обобщенной постановке для дифференциальных уравнений, самостоятельно изучать и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «незачтено» в текущем контроле.

Разработчики:

Профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений  
М.В.Фалалеев

Доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Е.Ю.  
Гражданцева

Доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Е.А. Головки