



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

Институт математики и информационных технологий  
Кафедра теории вероятностей и дискретной математики



**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**Б1.В.02 Элементы функционального анализа**

Направление подготовки профилями подготовки)	44.03.05	Педагогическое образование	(с двумя
Направленность (профиль) подготовки		Математика - Информатика	
Квалификация выпускника		бакалавр	
Форма обучения		очная	

Иркутск 2024 г.

## **1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ**

Цели: формирование у будущих бакалавров способности осваивать и использовать базовые научно-теоретические знания и практические умения по предмету в профессиональной деятельности, формирование современных теоретических знаний в области функционального анализа и практических навыков в их использовании при решении задач исследовательского типа как теоретического плана, так и с практическим содержанием, ознакомление студентов с начальными навыками математического моделирования.

Задачи: изучение основных понятий и методов линейного и нелинейного функционального анализа, ознакомление с их приложениями; выполнение в абстрактных пространствах всех основных операций и вычислительных процедур; изучение морфологии основных типов пространств; изучение основных типов пространств функций.

## **2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО**

Учебная дисциплина Б1.В.02 Элементы функционального анализа относится к части Блока 1 образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: математический анализ, алгебра, геометрия.

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: системы искусственного интеллекта, преддипломная практика, подготовка и защита ВКР.

## **3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки):

ПК-1 Способен осваивать и использовать базовые научно-теоретические знания и практические умения по предмету в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

Знать: аппарат функционального анализа.

Уметь: применять аппарат функционального анализа к конкретным задачам.

Владеть: способностью совершенствовать приобретенные навыки решения поставленных задач.

#### 4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 2 зачетных ед., 72 час.

Форма промежуточной аттестации: зачет с оценкой.

##### 4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Формы текущего контроля; Формы промежуточной аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися			Самостоятельная работа	
		Лекции	Лаб. занятия	Практ. занятия		
Раздел 1	5	1		1	1	ИКР*, зач.с оц.
Раздел 2	5	3		3		ИКР, зач.с оц.
Раздел 3	5	6		6		ИКР, зач.с оц.
Раздел 4	5	4		4		ИКР, зач.с оц.
Раздел 5	5	4		4		ИКР, зач.с оц.
Раздел 6	5	2		2		ИКР, зач.с оц.
Раздел 7	5	4		4		ИКР, зач.с оц.
Раздел 8	5	4		4		ИКР, зач.с оц.
Раздел 9	5	4		4		ИКР, зач.с оц.
Раздел 10	5	2		2	1	ИКР, зач.с оц.
Итого (5 семестр):		34		34	2	зач.с оц.

\* - ИКР- итоговая контрольная работа

##### 4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы
	Вид самостоятельной работы	Сроки выполнения	Затраты времени		
Тема 1.2	конспект	2 неделя (5 семестр)	1	опрос	[2, 3, 6]
Тема 10.1	конспект	14 неделя (5 семестр)	1	опрос	[2, 3, 6]
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			2		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)			2		

##### 4.3. Содержание учебного материала

Раздел 1. Введение.

Тема 1.1. Возникновение функционального анализа как самостоятельного раздела математики.

Тема 1.2. современное развитие функционального анализа и его связь с другими областями математики.

Раздел 2. Топологические и метрические пространства.

Тема 2.1. Определение топологического пространства, база, сепарабельность топологического пространства, предел и сходимость в топологических пространствах.

Тема 2.2. Определение метрики. Определение метрического пространства. Задание топологии с помощью метрики. Примеры метрических пространств с метриками.

Тема 2.3. Полные метрические пространства. Определение, примеры.

Тема 2.4. Теорема о вложенных шарах. Теорема о пополнении. Приложение теоремы о пополнении к построению интеграла Лебега и лебеговских пространств.

Раздел 3. Компактность в топологических и метрических пространствах.

Тема 3.1. Определение компактного пространства. Теорема Хаусдорфа. Свойства непрерывных отображений в метрических пространствах.

Тема 3.2. Принцип сжимающих отображений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма.

Раздел 4. Линейные нормированные пространства (ЛНП).

Тема 4.1. Определение и примеры линейных пространств. Норма ЛНП. Полные пространства. Банаховы пространства. Примеры ЛНП.

Тема 4.2. Эквивалентные нормы, теорема об эквивалентности норм в конечномерных пространствах. Примеры использования эквивалентных норм.

Раздел 5. Предгильбертово пространство. Скалярное произведение.

Тема 5.1. Непрерывность в предгильбертовом пространстве.

Тема 5.2. Теорема о параллелограмме.

Тема 5.3. Ортогональность в предгильбертовом пространстве.

Тема 5.4. Ортогональное дополнение.

Раздел 6. Гильбертово пространство.

Тема 6.1. Определение гильбертова пространства. Норма в гильбертовом пространстве.

Тема 6.2. Теорема об ортогональном разложении гильбертова пространства.

Тема 6.3. Изоморфизм гильбертова пространства.

Тема 6.4. Ортогональные системы элементов в гильбертовом пространстве. Теорема Шмидта об ортогонализации.

Тема 6.5. Неравенство Бесселя.

Тема 6.6. Полнота и замкнутость ОНС.

Раздел 7. Линейные операторы.

Тема 7.1. Определение линейного оператора, непрерывный оператор, теорема об однородности ЛНО.

Тема 7.2. Ограниченные операторы.

Тема 7.3. Норма оператора.

Тема 7.4. Обратный оператор, теорема Банаха об обратном операторе.

Тема 7.5. Пространство линейных ограниченных операторов.

Тема 7.6. Равномерная и поточечная сходимость.

Тема 7.7. Теорема Банаха – Штейнхауза.

Тема 7.8. Спектр и резольвента линейного оператора.

Раздел 8. Линейные интегральные уравнения.

Тема 8.1. Уравнения Фредгольма.

Тема 8.2. Уравнения Вольтера.

Тема 8.3. Резольвента интегрального оператора.

Раздел 9. Функционалы.

Тема 9.1. Понятие функционала.

Тема 9.2. Теорема Хана – Банаха (о продолжении), следствия теоремы.

Тема 9.3. Аналитическое представление линейных ограниченных функционалов.

Тема 9.4. Норма функционала. Теорема Рисса.

Раздел 10. Сопряженные пространства.

Тема 10.1. Конкретная реализация сопряженных пространств с точностью до изоморфизма.

#### 4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Раздел 1	1	ИКР	ПК-1
Раздел 2	3	ИКР	ПК-1
Раздел 3	6	ИКР	ПК-1
Раздел 4	4	ИКР	ПК-1
Раздел 5	4	ИКР	ПК-1
Раздел 6	2	ИКР	ПК-1
Раздел 7	4	ИКР	ПК-1
Раздел 8	4	ИКР	ПК-1
Раздел 9	4	ИКР	ПК-1
Раздел 10	2	ИКР	ПК-1

#### 4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Тема 1.2	конспект	ПК-1
Тема 10.1	конспект	ПК-1

#### 4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

- закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;
- приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
- формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
- развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;

- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

**Подготовка к лекции.** Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к практическому занятию.** Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовиться к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к семинарскому занятию.** Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к коллоквиуму.** Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к контрольной работе.** Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется кон-

трольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

**Подготовка к зачету.** Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуется делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

**Подготовка к экзамену.** Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

## **5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

а) основная литература

1. Дерр В.Я. Функциональный анализ: лекции и упражнения. - М.: Крокос. - 2013. – ISBN 978-5-406-02728-8. 76 экз. +

2. Люстерник, Лазарь Аронович. Краткий курс функционального анализа : учеб.пособие / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. - 2-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2009. - 271 с. - ISBN 978- 5-8114-0976-1. 60 экз. +

3. Люстерник, Л. А. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. - Москва : Лань, 2009. - 272 с. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-0976-1+

б) дополнительная литература

4. **Гуревич, Александр Петрович.** Сборник задач по функциональному анализу [Электронный ресурс] / А. П. Гуревич, А. П. Хромов, В. В. Корнев. - Электрон.текстовые дан. - Москва : Лань, 2012. - 192 с. : ил. - **Режим доступа:** [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=3175](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=3175). - ЭБС "Лань". - неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-1274-7 : 465.8 р.+

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

<https://isu.bibliotech.ru/>

<http://e.lanbook.com>

<http://rucont.ru/>

<http://ibooks.ru/>

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

### 6.2. Программное обеспечение

программное обеспечение не требуется.

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции
Итоговая контрольная работа	Разделы 2 – 10	ПК-1

### Примеры оценочных средств текущего контроля

#### Демонстрационный вариант итоговой контрольной работы

1. Можно ли в пространстве  $C_{[a,b]}^2$  принять за метрику  $\rho(x, y) = |(x(b) - x(a)) - (y(b) - y(a))| + \max_{[a,b]} |\dot{x}(t) - \dot{y}(t)|$ ?

2. Каким условиям должна удовлетворять определенная на  $R$  непрерывная функция  $u = f(v)$ , чтобы на вещественной прямой можно было задать метрику равенством  $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$ ?

3. Исследовать на сходимость в  $C_{[0,1]}$  и  $C_{[0,1]}^1$  последовательности а)  $\{x_n\}: x_n = \frac{t^n}{n}$ , б)  $\{x_n\}: x_n = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1}$ .

4. Пусть  $\alpha(t) \in C_{[0,1]}$  и  $\alpha(t): [0,1] \rightarrow [0,1]$ . доказать, что если ядро  $A(t, \tau)$  непрерывно в области  $\{0 \leq t \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1\}$ , причем  $\max_{t \in [0,1]} \int_0^{\alpha(t)} |A(t, \tau)| d\tau < 1$ , то оператор

$$A(x) = \int_0^{\alpha(t)} A(t, \tau) x(\tau) d\tau \text{ является сжимающим в } C_{[0,1]}.$$

5. Компактно ли множество функций  $x_n = t^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

6. Можно ли в линейном нормированном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций на  $[a, b]$  принять за норму элемента  $x(t)$  выражение  $|x(a)| + |\dot{x}(a)| + \max_{[a,b]} |\ddot{x}(t)|$ ?

7. Доказать, что множество  $C_{[a,b]}$  с интегральной нормой  $\|x(t)\| = \left( \int_a^b x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$

не является банаховым.

1. № 11.3 (смотри: [8]-Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. М.: МИФИ, 2001.)
9. № 21.1 (смотри: [8]-Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. М.: МИФИ, 2001.)

## 7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

### Список вопросов для промежуточной аттестации:

1. Понятие метрического пространства. Примеры.
2. Фундаментальные последовательности.
3. Полные метрические пространства (основные понятия и определения).
4. Принцип вложенных шаров принцип сжимающих отображений.
5. Компактные множества, критерий Хаусдорфа.
6. Критерии компактности в конкретных пространствах.
7. Линейные нормированные пространства.
8. Предгильбертово пространство. Теорема о параллелограмме.
9. Ортогональность в предгильбертовом пространстве.
10. Гильбертово пространство.
11. Ортогональные системы элементов в гильбертовом пространстве. Теорема Шмидта (об ортогонализации). Неравенство Бесселя.
12. Линейные операторы. Норма оператора.
13. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе.
14. Пространство линейных ограниченных операторов.
15. Линейные интегральные уравнения. Характеристические числа, собственные функции. Резольвента.
16. Понятие функционала. Теорема Хана – Банаха.
17. Аналитическое представление линейных ограниченных функционалов. Теорема Рисса.
18. Сопряженные пространства. Конкретная реализация сопряженных пространств с точностью до изоморфизма.

### Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:

#### Билет № А.

1. Исследовать пространство  $(X, \rho)$  на полноту, если  $X = R, \rho(x, y) = |\arctg(x - y)|$ .

2. Исследовать пространство  $A = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0; |x_3| \leq a_3\}$   
на компактность в  $R^3$ .

3. Найти все неподвижные точки отображения  $A: Ax(t) = \int_0^1 x^4(t) dt$  и исследовать его на сжимаемость в окрестности каждой неподвижной точки.

4. В пространстве  $C_{[0,1]}$  найти характеристические числа  $\lambda_k$  и собственные функции

$$\varphi_k \text{ уравнения } x(s) - \lambda \int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos(s) x(s) ds = 0.$$

Разработчик: Гражданцева Елена Юрьевна, к.ф.-м.н, доцент, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений.