МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)

Институт математики и информационных технологий
Кафедра теории вероятностей и дискретной математики

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор ИМИТ ИГУ
__________ М. В. Фалалеев
«19» мая 2021 г.

Рабочая программа дисциплины (модуля)

Б1.О.24 Математический анализ

Направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль) подготовки Математика - Информатика

Квалификация выпускника бакалавр

Форма обучения очная

Иркутск 2021 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели: формирование у будущих бакалавров способности осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

Задачи: освоение базовых теоретических знаний математического анализа, отработка практических навыков в их использовании при решении модельных задач как теоретического типа, так и с практическим содержанием; формирование у будущих бакалавров способности применять фундаментальные знания, полученные при изучении математического анализа в профессиональной деятельности.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.24 Математический анализ относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.
Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: дисциплинами: школьный курс математики.

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: элементы функционального анализа, дифференциальные уравнения, комплексный анализ, .

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки):
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен
Знать: основные понятия курса математического анализа.
Уметь: применять методы математического анализа к задачам разного типа, осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.
Владеть: навыками самостоятельного приобретения и совершенствования методов решения поставленных задач, навыками использования их в профессиональной деятельности.

4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 16 зачетных ед., 576 час.

Форма промежуточной аттестации: экзамен, экзамен, зачет с оценкой, экзамен.

4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися			Самост. работа	
		Лекции	Лаб. занятия	Практ. занятия		
Раздел 1	1	4		0	1	КР, экз.
Раздел 2	1	10		14	10	КР, экз.
Раздел 3	1	10		10	10	КР, экз.
Раздел 4	1	10		10	10	КР, экз.
Раздел 5	2	16		16	42	КР, экз.
Раздел 6	2	12		12	37	КР, экз.
Раздел 7	3	10		10	10	КР, зач. с оц.
Раздел 8	3	10		10	10	КР, зач. с оц.
Раздел 9	3	14		14	12	КР, зач. с оц.
Раздел 10	4	16		16	9	КР, экз.
Раздел 11	4	16		16	8	КР, экз.
Итого (1 семестр):		34		34	31	экз.
Итого (2 семестр):		28		28	79	экз.
Итого (3 семестр):		34		34	32	зач.с оц.
Итого (4 семестр):		32		32	17	экз.

4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самост. работы
	Вид самост. работы	Сроки выполнения	Затраты времени		
Раздел 1	конспект		1	КР № 1	[3], [8]
Раздел 2	конспект		10	КР № 2	[1,2,3,7,8,9]
Раздел 3	конспект		10	КР № 3, 4	[1,2,3,7,8,9]
Раздел 4	конспект		10	КР № 5, 6	[1,2,3,7,8,9]

Раздел 5	конспект		42	КР № 7, 8, 9	[1,2,3,7,8,10, 13]
Раздел 6	конспект		37	КР № 10, 11	[1,2,3,7,8,10]
Раздел 7	конспект		10	КР № 12, 13	[1,2,4,7,8,11]
Раздел 8	конспект		10	КР № 12, 13	[1,2,4,7,8,11]
Раздел 9	конспект		12	КР № 12, 13	[1,2,4,7,8,11, 12]
Раздел 10	конспект		9	КР № 14	[1,2,4,7,8,11, 12]
Раздел 11	конспект		8	КР № 15	[1,2,4,7,8,11, 12]
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			159		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)					

4.3. Содержание учебного материала

Раздел 1. Введение.

Тема 1.1. Аксиоматика множества действительных чисел.

Тема 1.2. Множества и операции над ними.

Тема 1.3. Принцип минимального элемента. Принцип математической индукции.

Тема 1.4. Модуль вещественного числа. Целая и дробная части числа. Плотность Qв R.

Тема 1.5. Верхние и нижние грани числовых множеств. Принцип вложенных отрезков.

Тема 1.6. Отображение, образ, прообраз, биекция.

Тема 1.7. Мощность множества. Счетные множества. Несчетность R. Плотность (R\Q) в R.

Раздел 2. Предел числовой последовательности.

Тема 2.1. Понятие предела последовательности. Единственность предела. Линейные свойства предела последовательности.

Тема 2.2. Свойства предела, связанные с неравенствами.

Тема 2.3. Необходимое условие сходимости последовательности. Теоремы о пределе произведения и частного сходящихся последовательностей.

Тема 2.4. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности. Число e. Теорема Штольца.

Тема 2.5. Подпоследовательности. Частичные пределы последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Тема 2.6. Критерий Коши сходимости числовых последовательностей.

Тема 2.7. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Раздел 3. Предел функции. Непрерывность функции.

Тема 3.1. Понятие предела функции в точке. Односторонние пределы.

Тема 3.2. Свойства предела функции.

Тема 3.3. Критерий Коши существования предела функции.

Тема 3.4. Замечательные пределы.

Тема 3.5. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Сравнение функций. О-символика. Эквивалентные функции.

Тема 3.6. Понятие непрерывности функции в точке (на множестве). Простейшие свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва и их классификация.

Тема 3.7. Глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши).

Тема 3.8. Понятие равномерной непрерывности функции.

Тема 3.9. Свойства замкнутых и открытых множеств. Компакт. Функции непрерывные на компакте.

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Тема 4.1. Понятия дифференцируемости функции в точке, производной, дифференциала.

Тема 4.2. Уравнение касательной к графику функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Механический смысл производной.

Тема 4.3. Дифференцирование сложной и обратной функций. Инвариантность формы первого дифференциала.

Тема 4.4. правила дифференцирования.

Тема 4.5. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Тема 4.6. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о средних значениях).

Тема 4.7. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.

Тема 4.8. Признаки монотонности функции. Точки экстремума. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Тема 4.9. Выпуклость и точки перегиба. Асимптоты.

Тема 4.10. Правило Лопиталя.

Тема 4.11. Формула Тейлора.

Раздел 5. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана.

Тема 5.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.

Тема 5.2. Основные методы интегрирования (замена переменной, интегрирование по частям).

Тема 5.3. Понятие определенного интеграла.

Тема 5.4. Суммы и интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости Римана.

Тема 5.5. Классы функций, интегрируемых по Риману.

Тема 5.6. Свойства определенного интеграла.

Тема 5.7. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Тема 5.8. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница.

Тема 5.9. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Тема 5.10. Теоремы о среднем для определенного интеграла.

Тема 5.11. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Интегральные неравенства.

Тема 5.12. Понятие несобственных интегралов 1-го и 2-го рода. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

Тема 5.13. Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов.

Тема 5.14. Замена переменных под знаком несобственного интеграла и формула интегрирования по частям. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Главное значение (в смысле Коши) несобственного интеграла.

Раздел 6. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Тема 6.1. Непрерывность функции в .

Тема 6.2. Дифференцируемые функции многих переменных. Дифференцирование сложных функций.

Тема 6.3. Производная по направлению. Градиент. Элементы дифференциальной геометрии.

Тема 6.4. Частные производные высших порядков.

Тема 6.5. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных.

Тема 6.6. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Тема 6.7. Неявные функции. Теоремы о неявных функциях.

Тема 6.8. Условный экстремум функции многих переменных.

Раздел 7. Числовые ряды.

Тема 7.1. Понятие числового ряда, сходимости и расходимости числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов.

Тема 7.2. Критерий Коши сходимости (расходимости) числового ряда. Необходимый признак сходимости. Признак сравнения.

Тема 7.3. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки Даламбера, Коши, Раабе, интегральный признак, Куммера, Бертрана, Гаусса).

Тема 7.4. Знакочередующиеся ряды.

Тема 7.5. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Достаточные признаки абсолютной сходимости.

Тема 7.6. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Тема 7.7. Преобразование Абеля. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.

Раздел 8. Функциональные последовательности и ряды.

Тема 8.1. Понятие функциональной последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.

Тема 8.2. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

Тема 8.3. Понятие функционального ряда. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Тема 8.4. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Тема 8.5. Признаки Дирихле, Абеля и Чоунди-Джолиффе равномерной сходимости функциональных рядов.

Раздел 9. Степенные ряды.

Тема 9.1. Понятие степенного ряда. Область сходимости, радиус сходимости степенного ряда.

Тема 9.2. Свойства сходящихся степенных рядов.

Тема 9.3. Ряды Тейлора и Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд.

Тема 9.4. Теорема Вейерштрасса для степенных рядов. Теорема Арцела-Асколи.

Раздел 10. Кратные интегралы

Тема 10.1. Определение двойного интеграла для прямоугольной области. Необходимое условие интегрируемости.

Тема 10.2. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу и их свойства. Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу.

Тема 10.3. Критерии интегрируемости Дарбу и Римана. Классы функций, интегрируемых по Риману.

Тема 10.4. Определение двойного интеграла для произвольной области. Свойства двойного интеграла.

Тема 10.5. Сведение двойного интеграла к повторному.

Тема 10.6. Замена переменных в двукратном интеграле.

Тема 10.7. Определение тройного интеграла для прямоугольной области. Необходимое условие интегрируемости.

Тема 10.8. Определение тройного интеграла для произвольной области. Свойства двойного интеграла.

Тема 10.9. Сведение тройного интеграла к повторному в декартовой системе координат.

Тема 10.10. Замена переменных в тройном интеграле(цилиндрическая и сферическая системы координат.

Тема 10.11. Приложения кратных интегралов.

Раздел 11. Криволинейные и поверхностные интегралы.

Тема 11.1. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода.

Тема 11.2. Поверхностные интегралы первого и второго рода.

Тема 11.3. Формула Грина.

Тема 11.4. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

Тема 11.5. Скалярные и векторные поля. Градиент, дивергенция, циркуляция, ротор (вихрь), поток.

Тема 11.6. Теорема Остроградского-Гаусса. Соленоидальные векторные поля.

Тема 11.7. Теорема Стокса. Потенциальные векторные поля.

4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Тема 2.1-2.7	14	КР № 2	УК-1
Тема 3.1-3.8	10	КР № 3, 4	УК-1
Тема 4.1-4.5, 4.8-4.10	10	КР № 5, 6	УК-1
Тема5.1-5.2, 5.8, 5.14	16	КР № 7, 8, 9	УК-1
Тема 6.4-6.8	12	КР № 10, 11	УК-1
Тема 7.1-7.6	10	КР № 12, 13	УК-1
Тема 8.1, 8.3	10	КР № 12, 13	УК-1
Тема 9.1-9.2	14	КР № 12, 13	УК-1
Тема 10.1, 10.4-10.11	16	КР № 14	УК-1
Тема11.1-11.3, 11.5	16	КР № 15	УК-1

4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Раздел 1: Леммы о единственности минимального элемента и принцип минимального элемента; Принцип математической индукции; Неравенство Бернулли; Бином Ньютона; Определения модуля вещественного числа, целой и дробной частей числа; Теоремы о плотности Q в R и $R \setminus Q$ в R.	конспект	УК-1
Раздел 2: Арифметические свойства предела числовой последовательности; Свойства предела числовой последовательности, связанные с неравенствами; Определение ограниченной последовательности; Ряд сравнения бесконечно больших	конспект	УК-1
Раздел 3: О-символика и сравнение функций; Ряд эквивалентных бесконечно малых функций; Свойства непрерывных функций	конспект	УК-1
Раздел 4: Уравнение касательной к графику функции; Геометрический смысл производной и дифференциала; Правила дифференцирования; Формула Лейбница; Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о среднем).	конспект	УК-1
Раздел 5: Свойства определенного интеграла; Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов; Первая теорема о среднем для определенного интеграла и следствия из нее; Вторая теорема о среднем для определенного интеграла и следствия из нее; Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме; Неравенства содержащие интегралы (неравенства Гельдера, Минковского, Коши-Буняковского), Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов;.	конспект	УК-1

Раздел 6: Понятие дифференцируемости функции многих переменных. Необходимое условие дифференцируемости; Понятие частной производной. Первое достаточное условие дифференцируемости; Теорема о дифференцировании сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила дифференцирования; Производная по направлению. Градиент функции и его свойства; Геометрический смысл дифференциала функции. Касательные и нормальный векторы поверхности; Частные производные высших порядков. Теоремы Шварца и Юнга. Второе достаточное условие дифференцируемости; Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Пеано; Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа	конспект	УК-1
Раздел 7: Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Достаточные признаки абсолютной сходимости числовых рядов; Свойства абсолютно и условно сходящихся числовых рядов. Теорема Римана; Признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов. Преобразование Абеля.	конспект	УК-1
Раздел 8: Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Область сходимости и радиус сходимости степенного ряда; Свойства сходящихся степенных рядов	конспект	УК-1
Раздел 9: Свойства двойного интеграла; Свойства тройного интеграла; Свойства криволинейных интегралов.	конспект	УК-1

4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

– закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;

– приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;

– формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;

– развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;

– развитие навыков самоорганизации;

– формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

– выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

Подготовка к лекции. Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к практическому занятию. Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к семинарскому занятию. Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к коллоквиуму. Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к контрольной работе. Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

Подготовка к зачету. Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуется делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

Подготовка к экзамену. Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1.**Сборникзадачиупражнений**по**математическомуанализу**[Текст] : учебное пособие / Б. П. Демидович. - 19-е изд., испр. - СПб. : Лань, 2017. - 623 с. : ил. ; 21 см. - (Учебники для вузов.Специальная литература). - **ISBN** 978-5-8114-2311-8 :**42** экз+

2. Ильин, Владимир Александрович. Математический анализ: учеб.для бакалавров вузов с углублен. изучением мат. анализа и для спец. мех.-мат. фак. ун-тов : [в 2 т.] / В. А.

Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. - 4-е изд. - М. : Юрайт, 2013. Ч. 1. - 2013. - 357 с. - ISBN 978-5-9916-2733-7. Экз. 26. +

3. Зорич, Владимир Антонович. Математический анализ: учеб.для студ. мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов / В. А. Зорич. - 5-е изд. - М. : Изд-во МЦНМО, 2007 - ISBN 5-94057-055-0. Ч.1. - 2007. - 657 с. - ISBN 5-94057-056-9. 50 экз.+

4. Зорич, Владимир Антонович. Математический анализ: учеб.для студ. мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов / В. А. Зорич. - 5-е изд. - М. : Изд-во МЦНМО - ISBN 5-94057-055-0. Ч.2. - 2007. - 789 с. - ISBN 5-94057-057-7. 50 экз. +

5. Будаев, Виктор Дмитриевич. Математический анализ. Функции одной переменной: учебник / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон. - Москва : Лань, 2012. - 544 с. : ил. ; 22 см. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-1186-3 +

6. Горлач, Б. А. Математический анализ / Б. А. Горлач. - Москва : Лань, 2013. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-1428-4 +

б) дополнительная литература

7. Ильин, Владимир Александрович. Математический анализ: учеб.для студ. вузов: В 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов ; Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект ; М. : Изд-во МГУ : ТК Велби, 2006 - Ч. 2. - 2006. - 357 с. - ISBN 5-482-00444-9 . 10 экз. +

8. Математический анализ : учеб.пособие для бакалавров, для студ. вузов / А. М. Кытманов. - ЭВК. - М. :Юрайт, 2012. - (Бакалавр.Базовый курс). - Режим доступа: ЭЧЗ "Библиотех". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-9916-1810-6. +

9. Фалалеев, Михаил Валентинович. Математический анализ : учеб.пособие для студ. вузов. обуч. по напр. подгот. "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Информационная безопасность": в 4 ч. / М. В. Фалалеев ; рец.: Н. А. Сидоров, А. А. Щеглова ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т мат., эконом.иинформ. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. - ISBN 978-5-9624-0822-4. Ч. 1. - 2013. - 177 с. - ISBN 978-5-9624-0822- 4. 51 экз. +

10. Фалалеев, Михаил Валентинович. Математический анализ : учеб.пособие для студ. вузов. обуч. по напр. подгот. "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Информационная безопасность": в 4 ч. / М. В. Фалалеев ; рец.: Н. А. Сидоров, А. А. Щеглова ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т мат., эконом.иинформ. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. - ISBN 978-5-9624-0822-4. Ч. 2. - 2013. - 139 с. - ISBN 978-5-9624- 0824-8. 51 экз. +

11. Фалалеев, Михаил Валентинович. Математический анализ : учеб.пособие для студ. вузов. обуч. по напр. подгот. "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Информационная безопасность": в 4 ч. / М. В. Фалалеев ; рец.: Н. А. Сидоров, А. А. Щеглова ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т мат., эконом.иинформ. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. - ISBN 978-5-9624-0822-4. Ч. 3. - 2013. - 154 с. - ISBN 978-5-9624-0825- 5. 51 экз. +

12. Фалалеев, Михаил Валентинович. Математический анализ : учеб.пособие для студ. вузов. обуч. по напр. подгот. "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Информационная безопасность": в 4 ч. / М. В. Фалалеев ; рец.: Н. А. Сидоров, А. А. Щеглова ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т мат., эконом.иинформ. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. - ISBN 978-5-9624-0822-4. Ч. 4. - 2013. - 113 с. - ISBN 978-5-9624-0826- 2. 51 экз. +

13. **Гражданцева Е.Ю.** Интегральное исчисление функции одной переменной : учеб.пособие / Е.Ю. Гражданцева. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2012. – 114 с. +70 экз.

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

https://isu.bibliotech.ru/
http://e.lanbook.com
http://rucont.ru/
http://ibooks.ru/
http://e-library.ru/
http://educa.isu.ru/

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

6.2. Программное обеспечение

Программное обеспечение не требуется.

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Оценочные средства текущего контроля

№ п\п	Вид контроля (текущие контрольные работы)	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компетенции
1	КР № 1	Раздел 1	УК-1
2	КР № 2	Раздел 2	
3	КР № 3, 4	Раздел 3	
4	КР № 5, 6	Раздел 4	
5	КР № 7, 8, 9	Раздел 5	
6	КР № 10, 11	Раздел 6	
7	КР № 12, 13	Раздел 7	
8	КР № 12, 13	Раздел 8	
9	КР № 12, 13	Раздел 9	
10	КР № 14	Раздел 10	
11	КР № 15	Раздел 11	

Примеры оценочных средств текущего контроля

Контрольная работа № 1
«Элементы теории множеств»

Вариант 1

1. Доказать, что множества четных и нечетных чисел – счетные.
2. Дана функция $f : Z^2 \to Z^2$, $f : (m, n) \to (m+n, m-n)$. Является ли f инъекцией, сюръекцией или биекцией?
3. Доказать равенство: $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$.

Вариант 2

1. Доказать, что множество конечных подмножеств счетного множества является счетным множеством.
2. Установить биекцию между $[0, 1)$ и $[1, +\infty)$.
3. Доказать, что множество A бесконечно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

Вариант 3

1. Определить мощность множества иррациональных алгебраических чисел.
2. Установить биекцию между отрезками R и $[0, +\infty)$.
3. Доказать равенство: $f^{-1}\left(\overline{A}\right) = \overline{f^{-1}\left(A\right)}$.

Контрольная работа № 2
«Предел числовой последовательности»

Вариант 1

1. Может ли последовательность иметь бесконечно много отрицательных членов, если она сходится к положительному числу?

а) да; б) нет; в) не всегда.

2. Если последовательность неограниченна, то она является

а) бесконечно большой; б) бесконечно малой; в) расходящейся.

3. Последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся к числу x, если

а) в любой окрестности точки x находится бесконечно много членов последовательности;

б) вне любой окрестности точки x находится не более конечного числа членов последовательности;

в) в любой окрестности точки x находится не более конечного числа членов последовательности.

4. Бесконечно малая последовательность

а) сходится; б) расходится; в) может быть как сходящейся, так и расходящейся.

5. Если последовательность сходится, то она

а) ограничена; б) бесконечно малая; в) неограниченна.

6. Выбрать пропущенные слова-знаки в порядке их следования:

«Число x не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\ldots \varepsilon > 0 \ldots$ *натуральное число* $N \ldots n > N$ выполняется неравенство $|x_n - x| \ldots \varepsilon$ »

а) $\forall, \forall, \exists, \geq$; б) $\forall, \exists, \forall, <$; в) $\exists, \forall, \exists, \geq$.

7. Вставить пропущенные слова в предложении «Последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу x … ее можно представить в виде: $x_n = x + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая».

а) тогда; б) если; в) тогда и только тогда, когда.

8. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является

а) ограниченной; б) бесконечно малой; в) сходящейся к числу $x \neq 0$.

9. Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt{n^2 + 12} - \sqrt{n^2 - 3}$ бесконечно малая.

10. Доказать, что последовательность $x_n = 6n^2 + n^3$ неограниченна.

11. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{2n}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.

12. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6^n + 3^n - 4n^4}$.

13. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{arctg\, n^3}{3\sqrt{n+1}}$.

14. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2\,n^3+3)^2-(2n^3-1)^2}{3n^3+2n-2}$.

Вариант 2

1. Может ли последовательность иметь бесконечно много положительных членов, если она сходится к отрицательному числу?

а) нет; б) да; в) не всегда.

2. Выбрать неверное утверждение. «Если две последовательности являются бесконечно малыми, то бесконечно малой будет и

а) сумма этих последовательностей; б) частное этих последовательностей;

в) произведение этих последовательностей.

3. Последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся к числу x, если

а) в любой окрестности точки x находится бесконечно много членов последовательности;

б) вне любой окрестности точки x находится не более конечного числа членов последовательности;

в) в любой окрестности точки x находится не более конечного числа членов последовательности.

4. Любая убывающая последовательность

а) ограничена; б) ограничена сверху; в) ограничена снизу

5. Если последовательность сходится, то она

а) ограничена; б) бесконечно малая; в) неограниченна.

6. Выбрать пропущенные слова-знаки в порядке их следования:

« $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\right) \Leftrightarrow \left(\ldots \varepsilon > 0 \ldots N_\varepsilon : \ldots n > N_\varepsilon \;\; \text{выполняется} \; |x_n - x| \ldots \varepsilon\right)$»

а) $\forall$, $\forall$, $\exists$, $\geq$; б) $\forall$, $\exists$, $\forall$, $<$; в) $\exists$, $\forall$, $\exists$, $<$.

7.Выбрать верное утверждение:

а) любая возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится;

б) любая возрастающая ограниченная снизу последовательность сходится;

в) любая убывающая ограниченная сверху последовательность сходится;

8. Пусть $\{x_n\}$ сходится к числу x и $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая, тогда $\{x_n \cdot \alpha_n\}$

а) ограниченная; б) бесконечно малая; в) расходится

9. Доказать, что последовательность $x_n = (2^n+1)/(3^n+1)$ ограничена.

10. Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt{n^2+2n}$ бесконечно большая.

11. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+10}{2n^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

12. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n\cos^2 n^2}}{n\sqrt{n+1}}$.

13. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} 9n\left(\sqrt{3n^4+5n} - \sqrt{3n^4-4n}\right)$.

14. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n^5+12}$.

Вариант 3

1. Пусть в некоторой окрестности точки x находится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Следует ли из этого, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$?

а) нет; б) да; в) не уверен(а).

2. Выбрать неверное утверждение. «Если две последовательности являются бесконечно малыми, то бесконечно малой будет и

а) сумма этих последовательностей;

б) частное этих последовательностей;

в) произведение этих последовательностей.

3. Бесконечно большая последовательность

а) сходится; б) расходится; в) может быть как сходящейся, так и расходящейся.

4. Любая возрастающая последовательность

а) ограничена; б) ограничена сверху; в) ограничена снизу.

5. Последовательность называется неограниченной, если

а) $\forall C>0\ \forall n\in N\ |x_n|>C$; б) $\exists C>0\ \forall n\in N\ |x_n|>C$;

в) $\forall C>0\ \exists\, n\in N:\ |x_n|>C$

6. Выбрать пропущенные слова-знаки в порядке их следования:

« $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq x\right) \Leftrightarrow \left(\ldots\varepsilon>0\ldots N\ \ldots\ n>N\ \textit{выполняется}\ |x_n-x|\ldots\varepsilon\right)$»

а) $\forall,\ \forall,\ \exists,\ \geq$; б) $\forall,\ \exists,\ \forall,\ <$; в) $\exists,\ \forall,\ \exists,\ \geq$.

7. Выбрать неверное утверждение.

а) любая возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится;

б) любая возрастающая ограниченная снизу последовательность сходится;

в) любая убывающая ограниченная последовательность сходится.

8. Пусть $\{x_n\}$ сходится к числу $x\neq 0$ и $\{y_n\}$ - бесконечно большая, тогда $\{x_n\cdot y_n\}$

а) ограниченная; б) бесконечно большая; в) сходящаяся

9. Доказать, что последовательность $x_n=(2n+1)/(3n+1)$ ограничена.

10. Доказать, что последовательность $x_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ бесконечно малая.

11. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{2n^2-1}=0$.

12. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin 2n}{n\sqrt{n+1}}$.

13. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

14. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}$.

Контрольная работа № 3

«Предел функции в точке. О-символика»

Вариант 1

1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln x = 0$.

2. Доказать, что $O(o(f)) = o(f)$ при $x \to x_0$.

3. Найти а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+ctgx)^{tgx}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}-\sqrt[7]{1+\frac{7}{x}}}{1-\sqrt[3]{1+\frac{6}{x}}}$.

4. Выделить главный член $A\alpha^n(x)$ б. м. (б. б.) функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ относительно б. м. (б. б.) $\alpha(x)$ и определить порядок малости (роста). Записать соответствующее асимптотическое разложение, если

$$f(x) = \log_x 2\,,\ x_0 = 1\,,\ \alpha(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Вариант 2

1. Доказать, что не существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\{x\}$.

2. Доказать, что $O(f) + o(f) = O(f)$ при $x \to x_0$.

3. Найти а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln\cos(\pi 2^x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)-\sin^2 x + arctgx}{\ln chx}$.

4. Выделить главный член $A\alpha^n(x)$ б. м. (б. б.) функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ относительно б. м. (б. б.) $\alpha(x)$ и определить порядок малости (роста). Записать соответствующее асимптотическое разложение, если

$$f(x) = (\sqrt{1-2x}-1)ctg^2 x^3\,,\ x_0 = 0\,,\ \alpha(x) = \frac{1}{x}.$$

Вариант 3

1. Доказать, что не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Доказать, что $o(x^n) + o(x^k) = o(x^k)$, при $x \to \infty$ $n,k \in N$, $k \geq n$.

3. Найти а) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x - x^a}{x-a}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x^2 - e^{-x^2}+1}{\log_5(1+4x^2)}$.

4. Выделить главный член $A\alpha^n(x)$ б. м. (б. б.) функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ относительно б. м. (б. б.) $\alpha(x)$ и определить порядок малости (роста). Записать соответствующее асимптотическое разложение, если

$$f(x) = \sin(\sqrt{x^2+9}-3)\,,\ x_0 = 0\,,\ \alpha(x) = x.$$

Контрольная работа № 4
«Непрерывность функции. Классификация точек разрыва. Равномерная непрерывность»

Вариант 1

1. Исследовать функцию $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ на непрерывность.

2.При каких значениях параметра A функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0.\end{cases}$$

непрерывна на всей числовой прямой.

3. Исследовать функцию $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ на равномерную непрерывность на множестве $[0;\ 1]$.

4. Существует ли непрерывная на интервале $(-1;\ 1)$ функция $y=f(x)$, отображающая $(-1;\ 1)$ на $(1\ \ +\infty)$? Ответ обоснуйте.

5. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$.

Вариант 2

1. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$ на непрерывность.
2. При каких значениях параметра A функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2}-1}{x^2}, & x\neq 0,\\ A, & x=0.\end{cases}$$

непрерывна на всей числовой прямой.

3. Исследовать функцию $y=\sqrt{x}$ на равномерную непрерывность на множестве $[1;\ +\infty)$.
4. Существует ли непрерывная на интервале $(a\ \ b)$ функция $y=f(x)$, отображающая $(a\ \ b)$ на $[0;\ 1]\cup[3;\ 4]$? Ответ обоснуйте.

5. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$.

Вариант 3

1. Исследовать функцию $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$ на непрерывность.
2. При каких значениях параметра A функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-3^{x^2}}{x^2}, & x\neq 0,\\ A, & x=0.\end{cases}$$

непрерывна на всей числовой прямой.

3. Исследовать функцию $y=arctgx$ на равномерную непрерывность на множестве R.
4.Существует ли непрерывная на отрезке $[0;\ 1]$ функция $y=f(x)$, отображающая $[0;\ 1]$ на R ? Ответ обоснуйте.

5. Найти асимптоты и построить график функции $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

Контрольная работа № 5
«Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Вариант 1

1. Найти производную функции $y=\dfrac{x}{9}+\dfrac{25}{1-x}$

2. Найти производную функции $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$

3. Найти $d\left(\dfrac{x^2 2^x}{x^x}\right)$ в точке $x = 2$.

4. Определить , при которых непрерывна и дифференцируема функция

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \le 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

5. Найти производную $y'(x)$ функции $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ в точке $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Вариант 2

1. Найти производную функции $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$.

2. Найти производную функции $y = x\sqrt{(x-1)^3}$.

3. Найти $d\left(arctg \dfrac{\ln x}{x}\right)$ в точке $x = \dfrac{1}{e}$.

4. Определить , при которых непрерывна и дифференцируема функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < -1, \\ \alpha(x+1)(x-1)(x-\beta), & -1 \le x \le 1, \\ 3x - 3, & x > 1. \end{cases}$$

5. Найти производную $y'(x)$ функции $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{t^3 + 1} \\ y = \dfrac{3t^2}{t^3 + 1} \end{cases}$ в точке $t = 0$.

Вариант 3

1. Найти производную функции $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

2. Найти производную функции $y = (1 - x)^2 e^{3x-1}$

3. Найти $d\left(\ln\left(\sqrt{1 + 2\cos x} + \sqrt{2\cos x - 1}\right)\right)$ в точке $x = \dfrac{\pi}{3}$.

4. Определить , при которых непрерывна и дифференцируема функция

$$f(x) = \begin{cases} arctg\,\alpha x + 2, & x \le -1, \\ \beta + \dfrac{x+1}{2}, & x > -1. \end{cases}$$

5. Найти производную $y'(x)$ функции $\begin{cases} x = (t-1)^2(t-2) \\ y = (t-1)^2(t-3) \end{cases}$ в точке $t = 3$.

Контрольная работа № 6
«Полное исследование функций и построение их графиков»

Контрольная работа № 7
«Основные методы неопределенного интегрирования»

Вариант 1

Найти

1) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$; 2) $\int \frac{arctge^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx$; 3) $\int \frac{dx}{x^3-1}$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; 5) $\int \frac{dx}{sh^2xch^2x}$;

6) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$.

Вариант 2

Найти

1) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$; 3) $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx$; 4) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$; 5) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$;

6) $\int \frac{xctg^2x^2}{\sin^2 x^2}dx$.

Вариант 3

Найти

1) $\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$; 3) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 4) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$; 5) $\int \frac{\ln xdx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

6) $\int x^2 e^{x^3}dx$.

Контрольная работа № 8
«Основные теоремы интегрального исчисления. Несобственные интегралы»

Вариант 1

1. Для функции $f(x)=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$ найти первообразную, проходящую через точку $\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$.

2. Найти а) $\int_0^{\frac{1}{2}} x\arccos xdx$,б) $\int_1^3 \max\{4-x^2;2\}dx$

3. Найти $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)}$ и $\int_0^{+\infty} \frac{arctgx\sin x\,dx}{x^2\sqrt{x}}$.

5. Найти $\frac{d}{dy}\int_{2y}^{y^2} \frac{x}{\ln x}dx$.

Вариант 2

1. Для функции $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ найти первообразную, проходящую через точку $(0,0)$.

2. Найти а) $\int\limits_0^1 x^2\arcsin x\,dx$, б) $\int\limits_{-1}^{2} e^{-|x|}dx$.

3. Найти $\int\limits_0^1 \dfrac{(6x-1)\,dx}{\sqrt{3-4x^2+8x}}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{\sin x\,dx}{x\ln^2 x}$ и $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{arctg 3x\cdot\cos 2x\,dx}{\sqrt{x}}$.

5. Найти $\dfrac{d}{dt}\int\limits_{\sqrt{t}}^{2t}\cos x^2\,dx$.

Вариант 3

1. Для функции $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ найти первообразную, проходящую через точку $(0,1)$.

2. Найти а) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x+x^2)\,dx}{(1+x)^2}$, б) $\int\left|x^2-2x\right|dx$.

3. Найти $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\cos x+\sin x}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}\sin\sqrt{x}\,dx$ и $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\ln^2(1+x)\cos 2x\,dx}{x^{5/2}}$.

5. Найти $\dfrac{d}{dy}\int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}}\dfrac{\cos x}{x^2}dx$.

Контрольная работа № 9
«Приложения определенного интеграла»

Вариант 1

1. Найти площадь, ограниченную кривой $\rho=a\cos 3\varphi$.

2. Найти объем тела, образованного вращением области, ограниченной линиями $y=x$, $y=2x-x^3$ вокруг оси $0x$.

3. Найти длину дуги кривой $x=6\cos t$, $y=6\sin t$, $z=3t$, $0\le t\le 2\pi$.

Вариант 2

1. Найти объем тела, образованного вращением области, ограниченной линиями $y^2=x^3$, $x=0$, $y=-\dfrac{1}{27}$, $y=8$ вокруг оси $0y$.

2. Найти площадь сектора $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}, \quad \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

3. Найти длину дуги кривой $x = \dfrac{2}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2, \quad y = -\dfrac{4}{3}t^3 + t^2, \quad z = \dfrac{t^3}{3}, \quad 0 \le t \le 1$.

Вариант 3

1. Найти объем тела, образованного вращением кривой $\begin{cases} x = a\sin^3 t \\ y = b\cos^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$ вокруг оси $0x$.

2. Найти длину дуги кривой $\rho = \varphi^2, \quad 0 \le \varphi \le \pi$.

3. Найти площадь, ограниченную кривыми $y^2 = 8x + 16, \quad x + y = 4, \quad 0 \le y \le 1$.

Контрольная работа № 10
«Функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость»

Вариант 1

1. Найти повторные пределы и двойной, если он существует при $x \to 0, \quad y \to 0$ функции $u = \dfrac{x^3 - y}{x^3 + y}$

2. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f = |y| \sin x$

3. Найти du и d^2u для функции $u = arctg\dfrac{xy}{z}$

4. Найти du и d^2u для функции $u = \varphi\left(\sin xy, \sin\dfrac{x}{y}\right)$

Вариант 2

1. Найти повторные пределы и двойной, если он существует при $x \to \infty, \quad y \to \infty$ функции $u = \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^2}$

2. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f = y\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^2}}$

3. Найти du и d^2u для функции $u = tg\left(e^y x\right)$

4. Найти du и d^2u для функции $u = f\left(x + y, x^2 - y^2, x^2 + z^2\right)$

Вариант 3

1. Найти повторные пределы и двойной, если он существует при $x \to +\infty, \quad y \to \pm 0$ функции $u = \dfrac{x^y}{x^y + 1}$

2. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f = y + \cos\sqrt[3]{x^2 + y^2}$

3. Найти du и d^2u для функции $u = \ln((x - 2y)z^4)$

4. Найти du и d^2u для функции $u = f\left(x^2 - y^2, \dfrac{x}{y}\right)$

Контрольная работа № 11

«Геометрический и механический смыслы градиента. Теорема о неявной функции. Условный и безусловный экстремум функций нескольких переменных»

Вариант 1

1. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$.
2. Найти $dz(x, y)$ и $du(x, y)$ для функций $z(x, y)$, $u(x, y)$, заданных системой
$$\begin{cases} x + y + z + u = a \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = b \end{cases}.$$
3. Исследовать на условный локальный экстремум функцию $u = x + y + z$, если $x^2 + z^2 = y$.
4. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^3 - 3xy + y^3$ в точке $M(1; 1; -1)$.
5. Дана функция $u = xz + \dfrac{x}{y}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial l}(2,1,2)$, где l - направление градиента функции $v = xyz$ в точке $M(2,1,2)$.

Вариант 2

1. Исследовать на локальный экстремум функцию $u = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz - 2yz$.
2. Найти $x'(z)$, $y'(z)$, $x''(z)$, $y''(z)$ в точке $z_0 = 4$ $(x(4) = 0,\ y(4) = -3)$ для функций $x(z)$, $y(z)$, заданных системой $\begin{cases} x + xy + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2z = 1 \end{cases}$.
3. Исследовать на условный локальный экстремум функцию $u = x + 2y + 3$, если $x^2 + y^2 = 1$.
4. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точке $M(-3; 4; 17)$.

Дана функция $u = xyz$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial l}(1,1,1)$, где $l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Найти $|grad\, u(1,1,1)|$.

Вариант 3

1. Исследовать на локальный экстремум функцию $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$.
2. Найти $z'(x)$, $y'(x)$, $z''(x)$, $y''(x)$ в точке $x_0 = 0$ $(y(0) = 1,\ z(0) = 1)$ для функций $x(z)$, $y(z)$, заданных системой $\begin{cases} x + xy + y + z = 2 \\ x^2 - y^2 - z^2 + 2 = 0 \end{cases}$.
3. Исследовать на условный локальный экстремум функцию $u = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, если $x^2 + y^2 = 25$.
4. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной параметрически $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ в точке, где $u = 1, v = 1$.
5. Дана функция $u = xz + \dfrac{x}{y}$. Найти $\dfrac{\partial u}{\partial l}(3,1,2)$, где l - направление градиента функции $v = xyz$ в точке $M(3,1,2)$.

Контрольная работа № 12
«Сходимость числовых рядов»

Вариант 1

Исследовать сходимость числовых рядов (в случае знакопеременных рядов установить характер сходимости)

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\ln\dfrac{n}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,tg\,\dfrac{n+2}{n^2+3}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)^p$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!!}{n!}arctg\,\dfrac{1}{3^n}$.

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{4^n}{(\ln n)^n}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\arcsin\dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$. 7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$.

Вариант 2

Исследовать сходимость числовых рядов (в случае знакопеременных рядов установить характер сходимости)

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+4}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{1}{2n^2}}-\cos\dfrac{1}{n}\right)^p$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!!}{(n!)^2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^3}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n}}arctgn$. 7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln^3 n}{n^{3/2}+1}$.

Вариант 3

Исследовать сходимость числовых рядов (в случае знакопеременных рядов установить характер сходимости)

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^{10} n}{n^{3/2}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln^4 n}}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{tg^p\,\frac{1}{n^2}}{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^3}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+1}}{\left(3n^2+2n+1\right)^{\frac{n+3}{2}}}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+2)}{\sqrt[5]{n^4+2n-1}}arctg\,\dfrac{\pi}{4n}$. 7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^{10}\ln^6 n}{2^n}$.

Контрольная работа № 13
«Функциональные ряды и последовательности»

Вариант 1

1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x)=\dfrac{nx}{1-2x+2n}$, если $a)\ x\in[0,1],\quad b)\ x\in[1,+\infty)$.

2. Исследовать на непрерывность сумму ряда $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right)$ при $x\geq 0$.

3. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{\pi n}{6}}{\sqrt{n^2+x^3}}$ на любом отрезке?

4. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n+1)\,3^n}$ на отрезке $[-3,1]$?

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{4^n}(x-4)^n$.

6. Разложить по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+\frac{x}{2}}}$. Определить область сходимости полученного ряда

Вариант 2

1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x)=e^{-nx^2}$, если $a)\ x\in(0,+\infty),\quad b)\ x\in[1,+\infty)$.

2. Исследовать на непрерывность сумму ряда $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ при $x\in R$.

3. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(3^{n(x-2)}+\frac{1}{2^{n(x+1)}}\right)$ на отрезке $[-1,2]$?

4. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-(x-1)^2 n}$ при $x\in[-1,1)$?

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\, x^n\,\cos\frac{\pi n}{4}$.

6. Разложить по степеням x функцию $f(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin^2 t}{t^2}dt$. Определить область сходимости полученного ряда.

Вариант 3

1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x)=n^{4/3}\sin\frac{x}{n^2}$, если $a)\ x\in R,\quad b)\ |x|\le a,\quad a>0$.

2. Исследовать на непрерывность сумму ряда $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{x}{1+n^3x^2}\right)$ при $x\ge 0$.

3. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{\sqrt{n^{3/2}+x^2}}$ на любом отрезке?

4. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{x^n+1}$ при $x>4$?

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}(x-2)^n$.

6. Разложить по степеням x функцию $f(x) = \frac{1}{(x-1)(2x+3)}$ и определить область сходимости полученного ряда.

Контрольная работа № 14
«Кратные интегралы и их приложения»

Вариант 1

1. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_y^1 e^{x^2} dxdy$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2 \ge a^2$.

3.Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$, где V ограничена поверхностями $z = y^2$, $z = 2y^2$, $z = \frac{x}{3}$, $z = 3x$, $z = 1$.

4.Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = xy$, $z = x + y$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

Вариант 2

1. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^2-1)dxdy$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x^2+y^2)^2 = 8a^2xy$, $x = 0$, $y = 0$.

3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, где V ограничена поверхностями $z = x^2+y^2$, $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 3x$.

4.Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.

Вариант 3

1. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_{(x-1)/2}^1 tg(y^2+y)dydx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$, $(x-a)^2 + (y-a)^2 \le a^2$.

3. 3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V ydxdydz$, где V ограничена поверхностями $z = x^2+y^2$, $z = 2(x^2+y^2)$, $xy = 9$, $xy = 18$, $x = 2y$, $2x = y$.

4.Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x^2+y^2+z^2 = b^2$, $x^2+y^2 = z^2$, $z \ge 0$, $0 < a < b$.

Контрольная работа № 15
«Криволинейные и поверхностные интегралы и их приложения»

Вариант 1

1. Вычислить циркуляцию вектора $F = yi - zj + xk$ вдоль эллипса $\frac{x^2+y^2}{2} + z^2 = a^2,\ y = x$ в положительном направлении отн-но орта i.
2. С помощью формулы Остроградского найти поток вектора $F = zk$ через всю поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в направлении внешней нормали.
3. С помощью формулы Стокса найти работу векторного поля $F = 2xye^z i + x^2e^z j + x^2ye^z k$ вдоль винтовой линии $x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi,\ z = \varphi,\ \varphi \in [0,\pi]$ в направлении возрастания параметра φ.
4. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, вырезаемой конусом $z = \sqrt{x^2+y^2}$, если плотность заряда $e(\overline{r}) = \gamma z \quad (\gamma = const)$.

Вариант 2

1. Вычислить работу поля $F = e^{y-z}i + e^{z-x}j + e^{x-y}k$ вдоль отрезка прямой от точки $O(0,0,0)$ до точки $M(1,3,5)$.
2. С помощью формулы Остроградского найти поток вектора $F = \overline{r}/|\overline{r}|$ через всю поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в направлении внешней нормали.
3. С помощью формулы Стокса найти циркуляцию вектора $F = z^3i + x^3j + y^3k$ по сечению гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $z + x = 0$ в положительном направлении отн-но орта j
4. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az = x^2 - y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, если ее плотность $\mu(\overline{r}) = \alpha|z| \quad (\alpha = const)$.

Вариант 3

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\cup OA} (F, d\overline{r})$, если $F = -yzi + xzj + xyk$, $\cup OA -$ первый виток винтовой линии $x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = ht \quad (0 \le t \le 2\pi)$.
2. С помощью формулы Остроградского найти поток векторного поля $F = (y+z)i + (z+x)j + (x+y)k$ через всю поверхность симплекса $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le a^2$ в направлении внешней нормали.
3. С помощью формулы Грина найти циркуляцию вектора $F = (\cos x + \sin y)i + x\cos yj$ вдоль эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ по часовой стрелке.
4. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2 = x^2 + y^2 + a^2 \quad (a \le z \le a\sqrt{2})$, если плотность заряда $e(\overline{r}) = \gamma z \quad (\gamma = const)$.

7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Список вопросов для промежуточной аттестации:

Программа экзамена за 1-ой семестр

1. Понятие минимума (максимума) числового множества.
2. Леммы о единственности минимального элемента и принцип минимального элемента.
3. Принцип математической индукции.
4. Неравенство Бернулли.
5. Бином Ньютона.
6. Определения модуля вещественного числа, целой и дробной частей числа.
7. Теоремы о плотности Q в R и $R \setminus Q$ в R.
8. Определения точной верхней и точной нижней граней числового множества.
9. Определения биекции и равномощности множеств. Определение счетного множества.
10. Определение предела числовой последовательности.
11. Теорема о единственности предела числовой последовательности.
12. Арифметические свойства предела числовой последовательности.
13. Свойства предела числовой последовательности, связанные с неравенствами.
14. Определение ограниченной последовательности.
15. Необходимый признак сходимости последовательности.
16. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности.
17. Теорема о пределе подпоследовательности.
18. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
19. Определение фундаментальной последовательности.
20. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
21. Критерий Коши расходимости числовой последовательности.
22. Определения неограниченной, бесконечно большой и бесконечно малой последовательности.
23. Теорема о пределе произведения ограниченной и бесконечно малой последовательностей.
24. Теорема о специальном представлении членов сходящейся последовательности.
25. Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями.
26. Ряд сравнения бесконечно больших.
27. Определения предела функции по Гейне и по Коши.
28. Определения односторонних пределов.
29. Свойства предела функции.
30. Критерий Коши существования предела функции.
31. Первый и второй замечательные пределы.
32. Определение бесконечно малой и бесконечно большой функции.
33. Теорема о специальном представлении функции, имеющей предел.
34. О-символика и сравнение функций.
35. Ряд эквивалентных функций при $x \to 0$.
36. Определения непрерывности функции по Гейне и по Коши.
37. Определение непрерывности на языке приращений.
38. Свойства непрерывных функций.
39. Определение точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.
40. Теорема о точках разрыва монотонной на отрезке функции.
41. Глобальные свойства функций непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши).
42. Определение равномерно непрерывной функции.
43. Теорема Кантора.
44. Определение предельной точки множества.
45. Определения открытого и замкнутого множеств и связь между ними.
46. Свойства замкнутых и открытых множеств.

47. Определение компактного множества в R.
48. Определение открытого покрытия.
49. Лемма Бореля.
50. Обобщенная теорема Кантора.
51. Определение производной функции в точке.
52. Определение дифференцируемости функции в точке.
53. Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности функции.
54. Уравнение касательной к графику функции.
55. Геометрический смысл производной и дифференциала.
56. Дифференцирование сложной и обратной функций.
57. Правила дифференцирования.
58. Формула Лейбница.
59. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о среднем).
60. Достаточное условие монотонности.
61. Необходимое условие экстремума.
62. Первое и второе достаточные условия экстремума.
63. Достаточное условие выпуклости графика функции.
64. Необходимое условие перегиба.
65. Первое и второе достаточные условия перегиба.
66. Определения вертикальной и наклонной асимптот графика функции.
67. Первое и второе правила Лопиталя.
68. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
69. Свойство единственности многочлена Тейлора.
70. Третье достаточное условие экстремума и перегиба.

Программа экзамена за 2-ой семестр

1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.
2. Основные методы интегрирования неопределенного интеграла.
3. Понятие определенного интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости. Геометрический смысл определенного интеграла.
4. Верхние и нижние интегральные суммы Дарбу и их свойства.
5. Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Критерий Римана интегрируемости функции.
6. Классы функций интегрируемых по Риману.
7. Свойства определенного интеграла.
8. Интегрируемость сложной и монотонной функций.
9. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница.
10. Основные методы интегрирования определенного интеграла.
11. Первая теорема о среднем для определенного интеграла и следствия из нее.
12. Вторая теорема о среднем для определенного интеграла и следствия из нее.
13. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
14. Неравенства содержащие интегралы (неравенства Гельдера, Минковского, Коши-Буняковского).
15. Понятие несобственного интеграла первого и второго рода. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.
16. Признак сравнения сходимости несобственных интегралов в форме неравенств и в предельной форме.
17. Признак Дирихле-Абеля.
18. Основные методы интегрирования несобственных интегралов.

19. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.
20. Понятие дифференцируемости функции многих переменных. Необходимое условие дифференцируемости.
21. Понятие частной производной. Первое достаточное условие дифференцируемости.
22. Теорема о дифференцировании сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила дифференцирования.
23. Производная по направлению. Градиент функции и его свойства.
24. Геометрический смысл дифференциала функции. Касательные и нормальный векторы поверхности.
25. Частные производные высших порядков. Теоремы Шварца и Юнга. Второе достаточное условие дифференцируемости.
26. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Пеано.
27. Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа.
28. Понятие локального экстремума функции многих переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума функции многих переменных.
29. Теорема о неявной функции.
30. Теорема о системе неявных функций и следствие из нее.
31. Понятие условного экстремума функции многих переменных и методы его нахождения: метод исключения (прямой метод), метод множителей Лагранжа. Экстремум функции на множестве.

Программа экзамена за 3-ой семестр

1. Понятие числового ряда, сходимости и расходимости числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов.
2. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимый признак сходимости (в двух формах).
3. Признак сравнения (в двух формах).
4. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами:
   - признак Даламбера;
   - корневой признак Коши;
   - признак Раабе;
   - интегральный признак Коши;
   - признак Куммера;
   - признак Бертрана;
   - признак Гаусса.
5. Знакочередующиеся числовые ряды. Признак Лейбница.
6. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Достаточные признаки абсолютной сходимости числовых рядов.
7. Свойства абсолютно и условно сходящихся числовых рядов. Теорема Римана.
8. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов. Преобразование Абеля.
9. Понятие функциональной последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.
10. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей:
    - теорема о перестановке пределов;
    - теорема Дини;
    - теорема о почленном интегрировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей;

- теорема о почленном дифференцировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

11. Понятие функционального ряда. Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.
12. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов:
    - теорема о перестановке пределов;
    - теорема Дини для функциональных рядов;
    - теорема о почленном интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов;
    - теорема о почленном дифференцировании равномерно сходящихся функциональных рядов.
13. Признаки Дирихле, Абеля и Чоунди-Джолиффе равномерной сходимости функциональных рядов.
14. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Область сходимости и радиус сходимости степенного ряда.
15. Свойства сходящихся степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд.
16. Теорема Вейерштрасса для степенных рядов.
17. Равномерное по параметру стремление функции двух переменных к пределу. Критерий Коши.
18. Свойства равномерного стремления функции к предельной:
    - теорема о непрерывности предельной функции;
    - теорема Дини;
    - теорема об интегрировании предельной функции;
    - теорема о дифференцировании предельной функции;
    - теорема о равномерном стремлении в прямоугольнике.
19. Эйлеровы интегралы 2-го рода. Γ-функция и ее свойства (непрерывность, бесконечная дифференцируемость, формулы приведения и дополнения).
20. Эйлеровы интегралы 1-го рода. B-функция и ее свойства (область определения, свойство симметрии, формула приведения).
21. Связь между эйлеровыми интегралами.

Программа экзамена за 4-ой семестр

1. Понятие двойного интеграла для прямоугольной области. Необходимое условие интегрируемости.
2. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу и их свойства.
3. Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Лемма Дарбу.
4. Критерий интегрируемости Дарбу.
5. Критерий интегрируемости Римана. Классы функций интегрируемых по Риману.
6. Определение двойного интеграла для произвольной области. Геометрический смысл двойного интеграла.
7. Свойства двойного интеграла (уметь доказывать три из них по выбору студента).
8. Сведение двойного интеграла к повторному.
9. Замена переменных в двукратном интеграле (вопрос будет разбит на три билета: линейный случай, лемма о площади образа, нелинейный случай, в каждом из которых надо дать формулировку теоремы, изложить общую схему доказательства и привести развернутое доказательство одного из этапов).
10. Понятие тройного интеграла для прямоугольной области.
11. Определение тройного интеграла для произвольной области. Геометрический смысл тройного интеграла
12. Сведение тройного интеграла к повторному

13. Замена переменных в тройном интеграле (цилиндрическая и сферическая системы координат).
14. Понятие криволинейного интеграла первого и второго рода, их физический смысл и зависимость от ориентации кривой.
15. Свойства криволинейных интегралов и теорема о их вычислении. Формула связи интегралов 1-го и 2-го рода.
16. Понятие поверхностного интеграла первого и второго рода, их физический смысл и зависимость от ориентации поверхности.
17. Теорема о вычислении поверхностных интегралов.
18. Формула Грина.
19. Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.
20. Операции над векторными и скалярными полями.
21. Теорема Остроградского-Гаусса. Соленоидальные векторные поля.
22. Теорема Стокса. Потенциальные векторные поля.

Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:

Образцы билетов к экзамену за 1-ой семестр

Билет №1

1. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.
2. Третье достаточное условие экстремума.

Задачи к билету №1

1. Пусть в некоторой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности x_n. Следует ли из этого условия, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
2. При различных значениях параметра a исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

Билет №2

1. Понятие модуля, целой и дробной части вещественного числа. Плотность Q в R.
2. Третье достаточное условие перегиба.

Задачи к билету №2

1. Пусть в некоторой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности x_n. Следует ли из этого условия, что x_n ограничена?
2. Для каких функций $f(x)$ композиции $f(\sin x)$ и $\sin(f(x))$ непрерывны?

Билет №3

1. Понятие счетного множества. Свойства счетных множеств. Счетность Q.
2. Первое и второе правила Лопиталя.

Задачи к билету №3

1. Пусть в любой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности x_n. Следует ли из этого условия, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?
2. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\notin Q,\\ 1, & x\in Q.\end{cases}$$

Образцы билетов к экзамену за 2-ой семестр

Билет №1

3. Понятие определенного интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости. Геометрический смысл определенного интеграла.
4. Частные производные высших порядков. Теоремы Шварца.

Задачи к билету №1

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\int_0^x e^{2t^2}dt}$.

2. Исследовать на непрерывность в точке $(0;\,0)$ функцию

$$f(x,\,y)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}+y^2, & x\neq 0,\\ y^2, & x=0.\end{cases}$$

3. Проверить, что отображение $f:R^2\to R^2$, заданное соотношением $f(x,y)=\left(e^x\cos y,\, e^x\sin y\right)$, локально обратимо в окрестности каждой точки из R^2.

Билет №2

1. Верхние и нижние интегральные суммы Дарбу и их свойства. Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу
2. Понятие локального экстремума функции многих переменных. Необходимое условие локального экстремума функции многих переменных.

Задачи к билету №2

1. Следует ли из интегрируемости разности двух функций интегрируемость уменьшаемого и вычитаемого? Ответ обосновать.
2. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}\,\ln\left(x^2+y^2\right)$**?**
3. Проверить, что уравнение $x^2z^3+y^3z^2+z^2x^3=8$ однозначно определяет функцию $z=z(x,y)$ в окрестности точки $(1;-1;2)$.

Билет №3

1. Критерий Римана интегрируемости функции.
2. Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных.

Задачи к билету №3

1. Найти производную $\dfrac{d}{db}\int_a^{b^2}e^{-x^2}dx$.

2. Исследовать на непрерывность в точке $(0;\,0)$ функцию

$$f(x,\,y)=\begin{cases}\sqrt[3]{xy}\cdot\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

3. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x-3y+z^2=0, \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$$

однозначно определяет отображения $y=y(x)$ и $z=z(x)$ в окрестности точки $(0;0;0)$.

Образцы билетов к экзамену за 3-ой семестр

Билет №1

1. Признак сравнения сходимости числовых рядов с положительными членами (в двух формах).

Задачи к билету №1

1. Доказать, что если последовательность $\{n\,a_n\}, a_n \geq 0$ ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится.

2. Определить область существования функции $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ и исследовать ее на дифференцируемость.

Билет №2

1. Признак Раабе сходимости числовых рядов с положительными членами.

2. Свойства сходящихся степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд.

Задачи к билету №2

1. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$.

2. Показать, что последовательность $f_n(x)=nx(1-x^2)^n$ сходится на отрезке $[0;1]$ к непрерывной функции $f(x)$, но $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

Билет №3

1. Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов с положительными членами.

Задачи к билету №3

1. Является ли сходящимся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0$, если при любом $p \in N$ $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$?

2. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$.

Образцы билетов к экзамену за 4-ой семестр

Билет №1

1. Понятие двойного интеграла для прямоугольной области. Необходимое условие интегрируемости.

Задачи к билету №1

1. Найти $div\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$ и $rot\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$, если $\vec{r} = (x, y, z)$.

2. Пусть $D \subset R^2$ -- односвязная плоская область, $L \subset D$ -- кусочно-гладкий замкнутый контур, $\vec{v}$ -- единичный вектор внешней нормали к L, S -- фигура, ограниченная контуром L. Доказать, что для любой функции $u \in C^2(D)$ гармонической в D, т.е. $\Delta u = 0$, справедливо равенство

$$\oint_L u \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} dl = \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy,$$ здесь $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Билет №2

1. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу и их свойства. (Доказать первые три свойства)

Задачи к билету №2

1. Доказать, что $rot(u \cdot \vec{a}) = u \cdot rot\, \vec{a} + grad\, u \times \vec{a}$.
2. Пусть S -- кусочно-гладкая замкнутая поверхность, $\vec{v}$ -- единичный вектор внешней нормали к S, $\vec{r}$ -- вектор из точки $\vec{x}_0$, лежащей вне S, в точку $\vec{x}$, лежащую на поверхности S. Вычислить интеграл Гаусса

$$\oiint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{v})}{|\vec{r}|^2} d\sigma.$$

Билет №3

1. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу и их свойства. (Доказать 4 и 5 свойства). Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Лемма Дарбу.

Задачи к билету №3

1. Найти $rot\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right)$, если $\vec{r} = (x, y, z)$.
2. Пусть $D \subset R^2$ -- односвязная плоская область, $L \subset D$ -- кусочно-гладкий замкнутый контур, $\vec{v}$ -- единичный вектор внешней нормали к L, S -- фигура, ограниченная контуром L. Доказать, что для любой функции $u \in C^2(D)$ гармонической в D, т.е. $\Delta u = 0$, справедливо равенство

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} dl = 0,$$ здесь $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Разработчик: Гражданцева Елена Юрьевна, к.ф.-м.н, доцент, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений