



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

Институт математики и информационных технологий
Кафедра теории вероятностей и дискретной математики



Рабочая программа дисциплины (модуля)

Б1.О.23 Геометрия

Направление подготовки профилями подготовки)	44.03.05	Педагогическое образование	(с двумя
Направленность (профиль) подготовки		Математика - Информатика	
Квалификация выпускника		бакалавр	
Форма обучения		очная	

Иркутск 2024 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели: формирование компетенций студентов, обучающихся по направлению «Педагогическое образование».

Задачи:

- формирование у студентов системы представлений о понятиях и фактах дисциплины; о геометрических методах и возможностях их применения;
- формирование представлений о важности (необходимости) изучения геометрии для осуществления будущей профессиональной деятельности;
- воспитание профессионально значимых личностных качеств студентов;
- формирование у студентов понимания о возможностях геометрии для развития универсальных учебных действий учащихся.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.23 Геометрия относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые у студентов при получении среднего (полного) общего или среднего профессионального образования.

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной:

Элементарная математика.

- Методика обучения математике
- Решение олимпиадных задач по математике
- Основы научно-исследовательской деятельности
- Курсы по выбору студента.

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки):

УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

Знать:

- определения понятий и формулировки ключевых теорем каждого раздела дисциплины;
- математические структуры и взаимосвязи между ними;
- различные способы построения математических теорий;
- типизацию задач и различные методы их решения;
- теоретические основы школьного курса геометрии;
- строение дисциплины «Геометрия» и связь между отдельными ее разделами;
- межпредметные связи дисциплины «Геометрия».
- возможности дисциплины для организации учебно-исследовательской и проектной деятельности учащихся;

Уметь

- демонстрировать освоенное знание логично и последовательно;
- приводить примеры и контрпримеры в процессе изложения геометрических вопросов (материала);
- применять основные методы (векторный, координатный, аксиоматический, геометрических преобразований) при доказательстве утверждений и решении задач;
- аргументировать выбор метода доказательства математического факта или метода решения задачи;
- применять геометрические знания к решению проблем, возникающих в реальной жизни.
- формулировать задания по дисциплине для организации исследовательской и проектной деятельности учащихся;

Владеть

- терминологией предметной области «Геометрия»;
- способами организации исследования при решении задач по дисциплине.

4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 11 зачетных ед., 396 час.

Форма промежуточной аттестации: экзамен, экзамен, экзамен.

4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися			Самост. работа	
		Лекции	Лаб. занятия	Практ. занятия		
Тема 1. Векторная алгебра	1	10		12	11	
Тема 2. Аналитическая геометрия на плоскости	1	24		22	20	
Тема 3. Аналитическая геометрия в пространстве	2	20		24	40	
Тема 4. Многомерные пространства	2	8		4	3	
Тема 5. Геометрические преобразования	3	18		22	2	
Тема 6. Проективная геометрия	3	8		8	2	
Тема 7. Основания геометрии	3	8		6		
Итого (1 семестр):		34		34	31	ЭКЗ.
Итого (2 семестр):		28		28	43	ЭКЗ.
Итого (3 семестр):		34		34	4	ЭКЗ.

4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самост. работы
	Вид самост. работы	Сроки выполнения	Затраты времени		
Тема 1. Векторная алгебра	Изучение лекционного материала. Подготовка к практическим занятиям. Выполнение индивидуальных заданий	Сентябрь Октябрь	11	Вопросы на экзамене. Собеседование по работе.	[1], [5]
Тема 2. Аналитическая геометрия на плоскости	Изучение лекционного материала. Подготовка к практическим занятиям. Выполнение индивидуальных заданий	Октябрь-декабрь	20	Вопросы на экзамене. Собеседование по работе.	[1], [5]
Тема 3. Аналитическая геометрия в пространстве	Изучение лекционного материала. Подготовка к практическим занятиям. Выполнение индивидуальных заданий.	Октябрь-ноябрь	40	Вопросы на экзамене. Собеседование по работе.	[1], [5]
Тема 4. Многомерные пространства	Изучение лекционного материала. Подготовка к практическим занятиям.	Декабрь	3	Вопросы на экзамене.	[3], [4]
Тема 5. Геометрические преобразования	Изучение лекционного материала. Подготовка к практическим занятиям.	Сентябрь-октябрь	2	Вопросы на экзамене.	[6], [11]
Тема 6. Проективная геометрия	Изучение лекционного материала. Подготовка к практическим занятиям.	Октябрь-ноябрь	2	Вопросы на экзамене.	[6], [10]
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			78		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)					

4.3. Содержание учебного материала

Тема 1. Векторная алгебра

Связанные, скользящие и свободные векторы. Линейные операции над векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Линейная зависимость векторов. Теоремы о линейной зависимости векторов на плоскости и в пространстве. Понятие о линейном пространстве. Базис и размерность линейного пространства. Скалярное произведение, его свойства. Связь с проектированием. Векторное произведение. Вычисление в ортонорми-

рованном репере. Смешанное произведение трех векторов. Его геометрическая интерпретация.

Тема 2. Аналитическая геометрия на плоскости.

Аффинная система координат на плоскости. Радиус-вектор и координаты точки в данной аффинной системе координат. Прямоугольная система координат. Простейшие задачи, решаемые с помощью координат. Метод координат на плоскости. Формулы преобразования координат точки при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой. Уравнения геометрического образа (гмт) на плоскости. Понятие алгебраической линии. Векторное (параметрическое) задание линий примеры. Полярная и обобщенная полярная системы координат на плоскости, связь полярных координат точки с прямоугольными декартовыми. Задание фигур в полярной системе, примеры.

Векторное, параметрические, каноническое, общее уравнения прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой в отрезках. Задание полуплоскости с помощью линейного неравенства.

Взаимное расположение двух прямых, связь с системами линейных уравнений и определителями. Нормальное уравнение, расстояние и отклонение от точки до прямой. Угол между прямыми.

Окружность, определение, вывод канонического уравнения. Эллипс, его фокальное определение, вывод канонического уравнения, изучение формы, эксцентриситет, построение по точкам. Гипербола, ее фокальное определение, вывод канонического уравнения, изучение формы, асимптоты, эксцентриситет, построение по точкам. Парабола, вывод канонического уравнения, изучение формы, построение по точкам. Директрисы эллипса и гиперболы. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат.

Классификация алгебраических линий второго порядка по инвариантам. Центры квадрата, их геометрический смысл. Центральные и нецентральные квадратики. Общие точки квадратики и прямой. Понятие асимптотического направления. Приведение уравнения алгебраической линии второго порядка к каноническому виду. Понятие касательной прямой к квадратику, вывод уравнения касательной в точке, не являющейся центром квадратики. Диаметр квадратики, сопряженный данному неасимптотическому направлению, вывод уравнения диаметра, сопряженные диаметры. Свойства диаметров центральных и нецентральных линий. Главные направления и оси квадратики. Главные диаметры квадратики.

Тема 3. Аналитическая геометрия в пространстве.

Аффинная система координат в пространстве. Радиус-вектор и координаты точки в данной аффинной системе координат. Прямоугольная система координат. Простейшие задачи, решаемые с помощью координат. Метод координат в пространстве.

Векторное, параметрические, общее уравнения плоскости. Плоскость как алгебраическая поверхность первого порядка. Уравнение плоскости в отрезках. Неполные уравнение плоскости. Нормальное уравнение плоскости. расстояние и отклонение от точки до плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей, связь с системами линейных уравнений. Пучки и связки плоскостей. Угол между плоскостями.

Векторное, параметрические и канонические уравнения прямой. Общие уравнения прямой, переход от них к каноническим, параметрическим и обратно. Взаимное расположение прямой и плоскости. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Расстояние между прямыми в пространстве.

Поверхности второго порядка. Метод сечений. Цилиндрические поверхности. Цилиндры второго порядка. Конические поверхности. Конические поверхности второго порядка.

Сечения невырожденного конуса. Поверхности вращения. Особенности их уравнений в подходящей системе координат. Эллипсоид. Гиперboloиды. Параболоиды. Прямо-

линейные образующие поверхностей второго порядка. Аффинная классификация поверхностей второго порядка.

Тема 4. Многомерные пространства

Понятие аффинного пространства над полем действительных чисел, аксиомы Г.Вейля и их следствия. Аффинный репер, координаты точек. Определение k -плоскости. Свойства k -плоскостей. Уравнения k -плоскостей. Взаимное расположение k -плоскостей. Отношение «лежать между», понятия отрезка, середины отрезка, луча, угла, r -мерного параллелепипеда.

Евклидово векторное пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Длины векторов и углы между ними, перпендикулярность (ортогональность), формула скалярного произведения в координатах. Евклидово точечное пространство. Расстояние между точками, его свойства, связь с отношением «лежать между» и с простым отношением трех точек. Понятие ортогональности подпространств и ортогонального дополнения в векторном пространстве. Понятие полного перпендикуляра.

Уравнение перпендикуляра к гиперплоскости (прямой) и расстояние от точки до гиперплоскости (прямой).

Тема 5. Геометрические преобразования

Преобразования множества, их обратимость; тождественное преобразование. Примеры. Композиция отображений и преобразований. «Эрлангенская программа» Феликса Клейна. Определение геометрии по Клейну, геометрические свойства фигур, эквивалентные фигуры. Примеры.

Движения плоскости. Свойства движений. Аналитическое задание движений. Движения первого и второго рода. Параллельные переносы, повороты, осевые и скользящие симметрии, как примеры движений плоскости. Центральная симметрия как частный случай поворота. Геометрические свойства, неподвижные точки и прямые, прямые неподвижных точек. Групповые свойства. Разложение движений плоскости в композицию не более трех осевых симметрий. Конгруэнтность фигур, признаки конгруэнтности треугольников. Определение метрической евклидовой геометрии по Клейну.

Преобразования подобия. Гомотетия как пример подобия. Разложение подобия в композицию гомотетии и движения. Формулы подобия. Неподвижные точки подобий. Классификация подобий плоскости. Признаки подобия треугольников. Подобие парабол, эллипсов, гипербол. Группа подобий, ее подгруппы. Геометрия относительно группы подобий.

Аффинные преобразования. Свойства аффинных преобразований. Формулы аффинного преобразования. Преобразования I и II родов. Группа аффинных преобразований, аффинная геометрия по Клейну. Аффинная эквивалентность четырехугольников и квадрат.

Определение инверсии, формулы, геометрические свойства. Образы прямых и окружностей. Метод инверсии. Применение инверсии к задачам “на построение” (одним циркулем) и “на доказательство”.

Движения пространства, их представление в виде композиции отражений от плоскостей. Классификация движений пространства. Группы самосовмещений правильных многогранников.

Тема 6. Проективная геометрия

Определение проективного n -мерного пространства. Модели проективной прямой и проективной плоскости. Простейшие свойства проективной плоскости. Проективные реперы на прямой и плоскости. Проективные координаты точек и построение точек по их координатам. Однородные аффинные координаты на расширенной прямой. Уравнение прямой на проективной плоскости. Принцип двойственности на проективной плоскости.

Трехвешинник. Теорема Дезарга. Обратная и двойственная теоремы к теореме Дезарга. Приложение к решению задач на построение одной линейкой на ограниченном чертеже. Сложное (двойное, ангармоническое) отношение четверки точек на прямой, его независимость от выбора системы координат, его свойства и вычисление через проективные координаты точек. Связь с простым отношением трех точек в аффинной плоскости. Сложное отношение четырех прямых пучка. Гармонические четверки. Полный четырехвершинник, применение его свойств к решению задач. Проективные преобразования плоскости. Включение проективной геометрии в схему Ф. Клейна. Квадрики на проективной плоскости. Аффинная и евклидова геометрии с проективной точки зрения.

Тема 7. Основания геометрии

Основные математические структуры курса геометрии. Модель системы аксиом. Основные свойства системы аксиом (непротиворечивость, минимальность, полнота). Основные этапы истории развития геометрии. «Начала» Евклида. Эквиваленты пятого постулата Евклида.

Обзор аксиоматики планиметрии по Гильберту. Абсолютная геометрия. Эквивалентность аксиоматик Гильберта и Г. Вейля. Аксиоматика учебника Л.С. Атанасяна и др.

Аксиоматика гиперболической планиметрии, ее непротиворечивость (модель Кэли-Клейна или Пуанкаре). Треугольники и четырехугольники в плоскости Лобачевского. Взаимное расположение прямых в плоскости Лобачевского. Параллельные прямые. Признак параллельности прямых. Существование параллельных прямых. Параллельность, ее симметричность и транзитивность. Секущая равного наклона. Расходящиеся прямые, их общий перпендикуляр. Угол параллельности, функция Лобачевского. Окружность, эквидистанта, орицикл.

4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
			УК-1
Определители второго и третьего порядка. Правило Крамера.	2		
Линейные операции над векторами	2		
Линейная зависимость. Базис. Координаты вектора в данном базисе.	2		
Скалярное произведение векторов.	2		
Векторное произведение векторов.	1		
Смешанное произведение векторов.	1		
Приложение векторной алгебры к решению задач элементарной геометрии.	2		
Прямоугольная система координат. Простейшие задачи, решаемые с помощью координат. Метод координат на плоскости			
Различные виды уравнение прямой на плоскости.	2		

Взаимное расположение прямых. Вычисление углов между прямыми.	2		
Нормальное уравнение. Расстояние от точки до прямой.	2		
Окружность.	2		
Эллипс. Основные свойства. Построение по точкам.	2		
Гипербола.. Основные свойства. Построение по точкам.	2		
Парабола. Основные свойства. Построение по точкам.	2		
Кривые второго порядка в полярной системе координат.	2		
Приведение уравнения центральных кривых к каноническому виду.	2		
Решение задач из школьного курса планиметрии методом координат.	2		
Прямоугольная система координат. Простейшие задачи, решаемые с помощью координат. Метод координат в пространстве.	2		
Векторное, параметрические, общее уравнения плоскости.	2		
Уравнение плоскости в отрезках. Неполное уравнение плоскости.	2		
Нормальное уравнение плоскости. расстояние и отклонение от точки до плоскости.	2		
Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями.	2		
Векторное, параметрические и канонические уравнения прямой.	2		
Общие уравнения прямой, переход от них к каноническим, параметрическим и обратно.	2		
Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Расстояние между прямыми в пространстве.	2		
Взаимное расположение прямой и плоскости.	2		
Применение метода координат к решению задач школьного курса геометрии.	2		
Поверхности второго порядка. Метод сечений.	2		
Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.	2		

Евклидово векторное пространство. Неравенство Коши-Буняковского.	2		
Уравнение k -плоскости. Взаимное расположение k -плоскостей.	2		
Движения плоскости. Свойства движений. Параллельный перенос.	2		
Центральная симметрия	2		
Осевая симметрии.	2		
Поворот на 90 градусов.	2		
Поворот на 60 градусов.	2		
Гомотетия. Поворотная гомотетия.	2		
Преобразования подобия. Признаки подобия треугольников.	2		
Подобие парабол, эллипсов, гипербол.	2		
Аффинные преобразования. Свойства аффинных преобразований. Аффинная эквивалентность четырехугольников и квадрат.	2		
Метод инверсии. Применение инверсии к задачам “на построение”	2		
Движения пространства Группы самосовмещений правильных многогранников.	2		
Принцип двойственности. Теорема Дезарга и ее применение к решению задач элементарной геометрии.	4		
Применение теорем Штейнера, Паскаля и Брианшона к решению задач элементарной геометрии.	4		
Различные аксиоматики школьного курса геометрии.	2		
Элементы геометрии Лобачевского.	4		

4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Тема 1	1) Доказательство свойств векторного и смешанного произведений. 2) Двойное векторное произведение. Доказательство тождества Якоби.	УК-1

Тема 2	1) Построение кривых в полярной системе координат. 2) Построение эллипса, гиперболы и параболы по точкам с помощью циркуля и линейки. 3) Оптические свойства кривых второго порядка.	УК-1
Тема 3	1) Нормированное уравнение плоскости 2) Расстояние между скрещивающимися прямыми 3) Прямолинейные образующие гиперболического параболоида	УК-1
Тема 4	Уравнение перпендикуляра к гиперплоскости (прямой) и расстояние от точки до гиперплоскости (прямой).	УК-1
Тема 5	Теоремы о прямой и окружности Эйлера для треугольников	УК-1
Тема 6	Применение проективных фактов к решению элементарно-графических задач.	УК-1

4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

- закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;
- приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
- формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
- развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;
- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

Подготовка к лекции. Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у

себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к практическому занятию. Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовиться к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к контрольной работе. Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

Подготовка к экзамену. Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) Основная литература

1. Канатников А. Н. Аналитическая геометрия [Текст] : учеб. для студ. вузов / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко ; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 2-е изд. - М. : Изд-во МГТУ, 2000. - 387 с. : ил. ; 21 см. - (Математика в техническом уни-

- верситете:Комплекс учебников из 20 выпусков ; вып.3). - ISBN 5703816718 : (физмат 29 экз.)
2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст] : учеб. пособие / Д. В. Клетеник ; под ред. Н. В. Ефимова. - 17-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2014. - 223 с. : ил. ; 21 см. - (Учебники для вузов. Специальная литература) (Классическая учебная литература по математике). - ISBN 978-5-8114-1051-4. - ISBN 5-93913-037-2 (физмат 49 экземпляров).
 3. Маслова, Ю. В. Основы многомерной геометрии : учебно-методическое пособие / Ю. В. Маслова. — Санкт-Петербург : РГПУ им. А. И. Герцена, 2018 — Часть 1 : Аффинные пространства — 2018. — 82 с. — ISBN 978-5-8064-2491-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/136675> (дата обращения: 20.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
 4. Маслова, Ю. В. Основы многомерной геометрии : учебно-методическое пособие / Ю. В. Маслова. — Санкт-Петербург : РГПУ им. А. И. Герцена, 2018 — Часть 2 : Евклидовы пространства — 2018. — 57 с. — ISBN 978-5-8064-2529-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/136688> (дата обращения: 20.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
 5. Осипенко Л. А.. Аналитическая геометрия [Текст] : учеб. пособие / Л. А. Осипенко, Л. Н. Шеметова ; Иркут. гос. ун-т, Ин-т математики, экономики и информатики. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2019. - 124 с. : ил., табл. ; 21 см. - Библиогр.: с. 124. - ISBN 978-5-9624-1727-1 (физмат 141 экземпляр).
 6. Реброва, И. Ю. Геометрические преобразования: элементы проективной геометрии : учебно-методическое пособие / И. Ю. Реброва, Д. Э. Ребров. — Тула : ТГПУ, 2020. — 60 с. — ISBN 978-5-6045159-1-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/167139> (дата обращения: 18.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

б) дополнительная литература:

7. Болодурин, В. С. Практикум по геометрическим преобразованиям : учебное пособие / В. С. Болодурин, А. Д. Сафарова. — Оренбург : ОГПУ, 2015. — 72 с. — ISBN 978-5-85859-614-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/73579> — Режим доступа: для авториз. пользователей.
8. Гаер М.А. Компьютерная геометрия [Текст] : учеб. пособие / М. А. **Гаер** ; рец.: Н. М. Кузуб, О. Д. Толстых ; Иркут. гос. ун-т, Ин-т математики и информ. технологий, Каф. теории вероятностей и дискрет. математики. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2021. - 131 с. : ил. ; 21 см. - Библиогр.: с. 131. - ISBN 978-5-9624-1936-7 :
9. Ильин, В. А. Аналитическая геометрия : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – 7-е изд., стер. – Москва : Физматлит, 2009. – 224 с. – (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 3). – Режим доступа: по подписке. – URL: – ISBN 978-5-9221-0511-8. – Текст : электронный.
10. Львова, Л. В. Проективная геометрия : учебное пособие / Л. В. Львова. — 2-е изд., доп. — Барнаул : АлтГПУ, 2017. — 182 с. — ISBN 978-5-88210-858-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/112177> (дата обращения: 18.05.2022). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
11. Реброва И. Ю. Геометрические преобразования плоскости: движения : учебное пособие / И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, А. В. Родионов, Е. М. Рарова. — Тула : ТГПУ, 2021. — 38 с. — ISBN 978-5-6047369-7-5. — Текст : электронный // Лань : элек-

тронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/213482>— Режим доступа: для авториз. пользователей.

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

<https://sites.google.com/site/prasolovskacatmoiknigi/>

<http://www.mathnet.ru/>

<http://www.allmath.ru/>

<http://www.newlibrary.ru/genre/nauka/matematika/>

<https://www.mccme.ru/>

<https://mathege.ru/>

<https://fipi.ru/>

<https://math.ru/lib>

<http://window.edu.ru/>

[НЭБ — Национальная электронная библиотека — скачать и читать онлайн книги, диссертации, учебные пособия \(rusneb.ru\)](#)

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Помещения для проведения лекционных и семинарских занятий, укомплектованные необходимым оборудованием, а именно: - аудитории, оснащенные мультимедийными средствами, для проведения аудиторных и практических занятий.

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции
Демонстрационный вариант проверочной работы №1	Векторная алгебра	УК-1
Демонстрационный вариант контрольной работы №1	Векторная алгебра	УК-1
Демонстрационный вариант контрольной работы №2	Аналитическая геометрия на плоскости	УК-1
Примерные вопросы для теста .	Аналитическая геометрия на плоскости	УК-1
Демонстрационный вариант контрольной работы №3	Аналитическая геометрия в пространстве	УК-1
Демонстрационный вариант контрольной работы №4	Геометрические преобразования	УК-1
Примерные вопросы для собеседования	Проективная геометрия	УК-1

Примеры оценочных средств текущего контроля

Тема 1

Проверочная работа №1 (демонстрационный вариант):

1. Найти координаты вектора, коллинеарного вектору $\vec{a} = (-2, 4, 1)$, если его длина равна $\sqrt{7}$ и он направлен в противоположную сторону.
2. Найти угол между векторами $\vec{a} = (2, 4, -3)$ и $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
3. Вычислить площадь параллелограмма ABCD, если A(2,-1,3), B(0,1,3), C(3,2,1).
4. Проверить, лежат ли точки A, B, C и D в одной плоскости, если A(2,-1,3), B(0,1,3), C(3,2,1), D(6,3,3).
5. Преобразовать выражения $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]$ и $[\vec{a} + 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}]$.

Контрольная работа №1 (демонстрационный вариант)

1. В треугольнике ABC M – точка пересечения медиан. Докажите, что $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.
2. Используя векторы, докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
3. В треугольнике ABC AB=2, AC=3 $\sqrt{2}$, $\angle BAC=45^\circ$. Найдите (средствами векторной алгебры) длину медианы AD.
4. В тетраэдре DABC точки M и N середины AB и CD соответственно. Докажите, что середины отрезков MC, MD, NA и NB являются вершинами параллелограмма.

Тема 2

Контрольная работа №2 (демонстрационный вариант)

1. Даны прямые $l_1 : x+2y+1=0$, $l_2 : 2x-y-5=0$. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4,1)$ а) параллельно прямой l_1 , б) перпендикулярно прямой l_2 . Найти отклонение и расстояние от данной точки от прямой l_1 . Найти угол между прямыми.
2. На катете BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C и углом 30 градусов при вершине A вне треугольника построен равносторонний треугольник BCD. Прямая AD пересекает сторону BC в точке K. Выбрав подходящую систему координат а) Докажите, что CK:KB=1:2. б) Прямая, проходящая через точку K перпендикулярно CD, пересекает гипотенузу AB в точке M. Найдите отношение AM:MB.

Примерные вопросы для теста по теме «Кривые второго порядка»

1. Установите соответствие между уравнением параболы и уравнением ее директрисы

1) $x^2=4y$	A) $x=-1$
2) $x^2=-4y$	B) $y=1$
3) $y^2=4x$	C) $y=-1$
4) $y^2=-4x$	D) $x=1$
2. Установите соответствие между кривыми второго порядка и величиной эксцентриситета.

1. Эллипс	A) равен 0
2. Гипербола	B) меньше 1
3. Парабола	C) равен 1
4. Окружность	D) больше 1
3. Какая точка является центром окружности $x^2+y^2+4x-6y+1=0$

1. (-2;3)	2. (2;-3)
3. (0;0)	4. (-4;6)
4. Какая кривая второго порядка имеет две асимптоты?

- | | |
|--------------|---------------|
| 1. парабола | 3. эллипс |
| 2. гипербола | 4. окружность |
- Найдите величину действительной оси гиперболы, если один из фокусов удален от его вершин на расстояния равные 5 и 1.
 - Точки параболы находятся на одинаковом расстоянии от фокуса и от прямой, которая называется (одно слово в именительном падеже)
 - Прямая $y=4$ имеет с окружностью $x^2+y^2-8x-9=0$ две общие точки (верно – неверно?).

Тема 3

Контрольная работа №3 (демонстрационный вариант)

- Написать уравнение в отрезках плоскости, проходящей через точку, параллельно данным векторам $M_1(3,1,2)$ $\vec{a}(1,0,4)$, $\vec{b}(2,1,0)$
- Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через данные три точки $M_1(2,1,0)$, $M_2(3,-2,1)$, $M_3(4,0,-1)$, $M_0(4,1,0)$.
- Найти угол между плоскостями $x+2y-2z+1=0$, $2x-y+2z-5=0$.
- Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания $\sqrt{2}$ и боковым ребром 2. Точки M и N — середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Выбрав подходящую систему координат

а) докажите, что $MN \perp BC_1$.

б) найдите расстояние от точки M до плоскости $BC_1 D$.

Тема №5

Контрольная работа №4 (демонстрационный вариант)

- Внутри параллелограмма $ABCD$ взята точка O так, что $\angle OAD = \angle OCD$. Докажите,

что $\angle OBC = \angle ODC$.

- Между пунктами A и B текут две реки. Где надо построить мосты через реки, чтобы путь из A в B через эти мосты был кратчайшим?
- Докажите, что четырёхугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом
- Постройте четырёхугольник $ABCD$, у которого диагональ AC является биссектрисой угла A , зная длины его сторон.
- Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

Тема №6

Примерные вопросы для собеседования

1. Дайте определение проективного пространства над полем K .
2. Что надо понимать под фразой: «Каждая точка проективного пространства порождается вектором»
3. Что называется моделью (интерпретацией) проективного пространства.
4. Приведите не менее двух моделей проективной прямой.
5. Приведите не менее двух моделей проективной плоскости. Укажите, что в этих моделях является проективными прямыми.
6. Дайте определение проективного репера в n -мерном проективном пространстве.
7. Сколько координат имеет точка в n -мерном проективном пространстве?
8. Опишите алгоритм построения точки по ее координатам на проективной прямой (плоскости) в модели «расширенная аффинная прямая (плоскость)».
9. Сформулируйте простейшие свойства проективной плоскости, связанные с точками, прямыми и отношением принадлежности (инцидентности).
10. Запишите общее и параметрические уравнения прямой на проективной плоскости.
11. Опишите алгоритм составления уравнения прямой, проходящей через две заданные точки на проективной плоскости.
12. Сформулируйте принцип двойственности на проективной плоскости (в трехмерном проективном пространстве).
13. Дайте определение трехвершинника и трехсторонника. Являются ли эти фигуры двойственными? Ответ поясните.
14. Сформулируйте теорему Дезарга, двойственную к ней и обратную. Что можно сказать о связи между последними двумя теоремами?
15. Дайте определение сложного отношения четырех коллинеарных точек.
16. Когда говорят, что одна пара точек гармонически разделяет другую?
17. Чем является двойственный образ гармонической четверки точек? Дайте его определение. Приведите пример.
18. Сформулируйте теорему о гармонических свойствах полного четырехвершинника.
19. Что является основным инвариантом группы проективных преобразований?
20. Какие свойства фигур называются проективными?
21. Что называется квадрикой (линией второго порядка) на проективной плоскости?
22. Какие точки называются особыми точками квадрики? Сколько особых точек может быть у квадрики?
23. Какова классификация квадрик на проективной плоскости?
24. Напишите, как выглядят канонические уравнения квадрик всех возможных видов.
25. Квадрика задана пятью своими точками. Опишите алгоритм построения шестой точки такой квадрики.

7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Список вопросов для промежуточной аттестации:

1 семестр

Векторная алгебра

1. Определение вектора. Коллинеарные и компланарные векторы. Сонаправленные векторы. Равные векторы. Орт вектора.
2. Сложение векторов и вычитание двух векторов, правила треугольника и параллелограмма. Алгебраические свойства.
3. Умножение вектора на число. Свойства умножения. Признак коллинеарности двух векторов.
4. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Теоремы о линейной зависимости векторов на плоскости и в пространстве.

5. Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора в данном базисе.
6. n -мерное векторное пространство. Базис и координаты вектора. Теорема о единственности координат.
7. Проекция вектора на вектор и ее свойства.
8. Скалярное произведение векторов. Его алгебраические и геометрические свойства.
9. Скалярное произведение векторов. Вычисление в координатах и приложения.
10. Векторное произведение векторов и его алгебраические и геометрические свойства.
11. Смешанное произведение векторов, его геометрические и алгебраические свойства.
12. Вычисление векторного и смешанного произведения в координатах.
13. Приложения векторного и смешанного произведения.

Аналитическая геометрия на плоскости

1. Прямоугольная декартова система координат (ПДСК) простейшие задачи аналитической геометрии: расстояние между точками, деление отрезка в данном отношении.
2. Формулы перехода от одной аффинной (прямоугольной декартовой) системы координат к другой.
3. Уравнение геометрического образа. Две задачи аналитической геометрии.
4. Примеры параметрического задания кривой. Вывод уравнения циклоиды.
5. Общее уравнение прямой. Неполные уравнения.
6. Параметрические уравнения прямой на плоскости. Каноническое уравнение прямой.
7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку.
8. Угол между двумя прямыми с угловым коэффициентом. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.
9. Нормальное уравнение прямой. Приведение общего уравнения прямой к нормальному виду.
10. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
11. Геометрический смысл неравенств $Ax+By+C>0$, $Ax+By+C<0$.
12. Определение и вывод канонического уравнения эллипса.
13. Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению.
14. Определение и вывод канонического уравнения гиперболы.
15. Исследование формы гиперболы по ее каноническому уравнению. Эксцентриситет.
16. Определение и вывод канонического уравнения параболы. Исследование формы параболы по ее каноническому уравнению. Эксцентриситет.
17. Директрисы эллипса и гиперболы. Параметр.
18. Полярная система координат на плоскости. Переход от полярных координат точки к декартовым и обратно.
19. Полярные уравнения конических сечений.
20. Понятие квадрики (кривой второго порядка) классификация по инвариантам.
21. Центр квадрики.
22. Асимптотические направления относительно квадрики. Исследование условия асимптотического направления.
23. Касательная к квадрике. Теорема существования и единственности. Уравнение касательной.
24. Сопряженные направления.
25. Диаметры квадрики. Сопряженные диаметры. Свойства диаметров. Главные направления квадрики.

Аналитическая геометрия в пространстве

1. Аффинная система координат и аффинные координаты в трехмерном пространстве.
2. Уравнение множества точек. Две основные задачи аналитической геометрии. Алгебраические поверхности. Вывод уравнения сферы.
3. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
4. Общее уравнение плоскости. Параметрическое уравнение плоскости.
5. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, через точку параллельно двум направляющим векторам.
6. Уравнение плоскости в отрезках. Неполные уравнения плоскости.
7. Взаимное расположение плоскостей. Угол между двумя плоскостями.
8. Расстояние от точки до плоскости.
9. Геометрический смысл неравенств $Ax+By+Cz+D>0$, $Ax+By+Cz+D<0$.
10. Общее уравнение прямой в пространстве. Уравнение пучка плоскостей.
11. Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве.
12. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми.
13. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
14. Вычисление расстояний от точки до прямой и между двумя прямыми в трехмерном пространстве (рассмотреть все возможные случаи).
15. Определение цилиндрической поверхности. Направляющая и образующие. Цилиндры второго порядка. Исследование методом сечений.
14. Определение конической поверхности. Направляющая и образующие.
15. Конус второго порядка. Исследование методом сечений.
16. Определение поверхности вращения. Параллели и меридианы. Вывод уравнения поверхности вращения.
17. Эллипсоиды. Исследование методом сечений. Построение в системе координат.
18. Однополостные гиперболоиды. Исследование методом сечений. Построение в системе координат.
19. Двуполостные гиперболоиды. Исследование методом сечений. Построение в системе координат.
20. Эллиптические параболоиды. Исследование методом сечений. Построение в системе координат.
21. Гиперболические параболоиды. Исследование методом сечений. Построение в системе координат.
22. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

Многомерная геометрия

1. Определение n -мерного аффинного пространства. Простейшие следствия из системы аксиом n -мерного аффинного пространства.
2. Аффинный репер в n -мерном аффинном пространстве. Координаты точек.
3. Формулы преобразования координат точек при переходе от одного аффинного репера к другому.
4. k -плоскости. Определение. Примеры. Свойства.
5. Параметрические и общие уравнения k -плоскости.
6. Взаимное расположение двух плоскостей в n -мерном аффинном пространстве.
7. пространство.
8. Определение n -мерного евклидова векторного пространства. Длина вектора. Угол между векторами.
9. Определение отрезка, луча, угла. Вычисление расстояний и углов в n -мерном евклидовом пространстве. Вывод уравнения гиперсферы.

3 семестр

Геометрические преобразования плоскости и пространства

1. Отображения, биекции, преобразования. Примеры и контрпримеры.
2. Композиция отображений, ее некоммутативность. Теорема о группе всех преобразований пространства
3. Аффинные преобразования. Групповое свойство аффинных преобразований (теорема), понятие аффинной геометрии по Клейну.
4. Геометрические свойства аффинных преобразований.
5. Аффинная эквивалентность фигур (прямые, лучи, отрезки, полуплоскости, углы, треугольники). Аффинные классы четырехугольников. Аффинные классы квадратов на плоскости.
6. Движения евклидовой плоскости. Задание движения парой реперов и геометрические свойства движений.
7. Аналитическое задание движений евклидовой плоскости. Движения первого и второго рода.
8. Параллельный перенос плоскости и его свойства.
9. Поворот плоскости и его свойства.
10. Центральная симметрия плоскости как частный случай поворота плоскости.
11. Осевая симметрия плоскости и ее свойства.
12. Скользящая симметрия плоскости и ее свойства.
13. Разложение движений плоскости в композицию не более трех осевых симметрий.
14. Движения трехмерного пространства Классификация движений первого рода трехмерного пространства.
15. Классификация движений второго рода трехмерного пространства.
16. Разложение движений на отражения от плоскостей. Примеры композиций отражений.
17. Разложение аффинного преобразования на движение и растяжения.
18. Подобия, их групповые и геометрические свойства.
19. Гомотетия плоскости и ее свойства.
20. Разложение подобия в композицию движения и гомотетии. Формулы подобий.
21. Неподвижные точки подобий. Классификация подобий плоскости.
22. Три признака подобия треугольников.
23. Подобие парабол, эллипсов, гипербол.

Проективная геометрия

1. Определение проективного пространства. Модели проективной прямой и проективной плоскости.
2. Проективный репер и проективные координаты точки в проективном пространстве. Проективные координаты на проективной прямой.
3. Построение точки по ее координатам. Связь между проективными и аффинными координатами точки на проективной прямой.
4. Проективные координаты на проективной плоскости. Построение точки по ее координатам. Связь между проективными и аффинными координатами точки на проективной плоскости.
5. Уравнение прямой на проективной плоскости.
6. Принцип двойственности на проективной плоскости.
7. Теорема Дезарга и обратная к ней. Конфигурация Дезарга.
8. Применение теоремы Дезарга для решения задач по элементарной геометрии.
9. Сложное отношение четырех коллинеарных точек. Свойства сложного отношения четырех коллинеарных точек. Связь между сложным отношением и простыми отношениями на расширенной проективной плоскости..
10. Гармонические четверки точек и прямых. Примеры.
11. Полный четырехвершинник и его гармонические свойства. Двойственная теорема.

12. Приложение свойств полного четырехвершинника к решению задач по элементарной геометрии.

Основания геометрии

1. "Начала" Евклида. Содержание и характеристика. Историческое значение.
2. Проблема пятого постулата и ее решение. Значение открытия неевклидовой геометрии.
3. Сущность аксиоматического метода. Понятие математической структуры.
4. Требования, предъявляемые к системе аксиом.
5. Структура евклидовой плоскости по Гильберту. Характеристика аксиоматики Гильберта.
6. Структура евклидовой плоскости по Вейлю. Доказать непротиворечивость аксиоматики Вейля.
7. Школьная аксиоматика евклидовой плоскости (по Атанасяну).
8. Эквивалентность аксиоматики Вейля и аксиоматики Атанасяна.
9. Аксиоматика плоскости Лобачевского. Доказательство ее непротиворечивости.
10. Прямые на плоскости Лобачевского
11. Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского.

Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:

Демонстрационный вариант билета (1 семестр)

1. Векторное произведение векторов. Определение. Свойства векторного произведения векторов (с доказательством).
2. Центр кривой второго порядка. Определение. Найти центр кривой $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.
3. Решите задачу: на катетах KL и ML прямоугольного треугольника KLM вне треугольника построены квадраты $ABKL$ и $CDLM$, Через точку L проведена прямая, перпендикулярная к AD и пересекающая прямую KM в точке E . Используя метод координат определите, в каком отношении точка E делит гипотенузу KM .

Демонстрационный вариант билета (второй семестр)

1. Определение n -мерного аффинного пространства. Простейшие следствия из системы аксиом n -мерного аффинного пространства.
2. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве (вывод). Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0, \\ x - y - 2z + 4 = 0. \end{cases}$
3. Решите задачу. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите (используя метод координат) угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1 .

Демонстрационный вариант билета (третий семестр)

1. Движения трехмерного пространства Классификация движений.
2. Докажите, что множество всех диаметров окружности является моделью проективной прямой.
3. Решите задачу (используя подходящее преобразование плоскости): два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B . Докажите, что медиана BE треугольни-

ка АВК и высота ВF треугольника СВN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке.)

Разработчики:

_____ доцент кафедры теории вероятностей и дискретной математики
ИМИТ, к.ф.м-н- Кузьмина Е.Ю.

_____ доцент кафедры теории вероятностей и дискретной математики
ИМИТ, к.ф.м-н- Осипенко Л.А.