**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

Институт математики и информационных технологий

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

**«УТВЕРЖДАЮ»**
**Директор ИМИТ ИГУ**
**_____ М. В. Фалалеев**
**«15» июня 2020 г.**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**Б1.О.21 Математическая логика**

| | |
|---|---|
| Направление подготовки | 01.03.02 Прикладная математика и информатика |
| Направленность (профиль) подготовки | Математическое и компьютерное моделирование |
| Квалификация выпускника | бакалавр |
| Форма обучения | очная |

Иркутск 2020 г.

## 1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

ЦЕЛИ: изучение математических доказательств, формальных определений алгоритмов, включая примитивно рекурсивные функции и рекурсивно перечислимые множества, алгебры, модели и алгебраические системы.

ЗАДАЧИ: построение математических доказательств и алгоритмов решения ряда массовых вычислительных задач, проверка рекурсивной перечислимости множеств, проверка разрешимости формальных теорий ряда классов моделей и алгебраических систем.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.21 Математическая логика относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.
Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: **математическим анализом, алгеброй, геометрией.**

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: **базы данных и системы управления базами данных, проектирование информационных систем**.

## 3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика:
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен
ЗНАТЬ: способы задания множеств, теоретико-множественные операции, отношения и функции, алгебры, модели и многоосновные алгебраические системы. правила логического вывода исчислений высказываний и предикатов, полные системы логических связок, системы аксиом для исчисления высказываний и предикатов, Независимость аксиом. многозначные логики, теории первого порядка, теорему полноты, примитивно рекурсивные функции и рекурсивно перечислимые множества, основные вычислимые операторы, оператор суперпозиции частичных функций.
УМЕТЬ: определять отношения через функции и функции через отношения, строить логический вывод для формул исчислений высказываний и предикатов, строить нумерационные функции и функции Геделя, пользоваться универсальной общерекурсивной функцией, проводить параметризацию частично рекурсивных функций, применять универсальные частично рекурсивные функции, реализовывать алгоритмы и вычислимые функции., используя детерминированные машины Тьюринга.

.

.

ВЛАДЕТЬ: методами теоретико-множественного анализа, поиска логического вывода на основе теоремы дедукции, построения детерминированных машин Тьюринга с заданными свойствами, включая универсальные, определения проверки разрешимости элементарных теорий классов многоосновных алгебраических систем.

## 4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 3 зачетных ед., 108 час.

Форма промежуточной аттестации: зачет с оценкой.

### 4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

| Раздел дисциплины / тема | Сем. | Виды учебной работы | | | | Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Контактная работа преподавателя с обучающимися | | | Самост. работа | |
| | | Лекции | Лаб. занятия | Практ. занятия | | |
| Тема 1. Множества. Теоретико-множественные операции. Отношения и функции. Алгебры, модели и алгебраические системы. | | 6 | | 6 | 6 | Контрольная |
| Тема 2. Исчисление высказываний. | | 6 | | 6 | 6 | Контрольная |
| Тема 3. Теории первого порядка. | | 6 | | 6 | 6 | Контрольная |
| Тема 4. Примитивно рекурсивные функции и рекурсивно перечислимые множества. | | 6 | | 6 | 6 | Контрольная |
| Тема 5. Общерекурсивные и частично рекурсивные функции | | 6 | | 6 | 4 | Контрольная |
| Тема 6. Алгоритмы и детерминированные машины Тьюринга | | 4 | | 4 | 4 | Контрольная |
| Итого (5 семестр): | | 34 | | 34 | 32 | зач.с оц. |

### 4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

| Раздел дисциплины / тема | Самостоятельная работа обучающихся | | | Оценочное средство | Учебно-методическое обеспечение самост. работы |
|---|---|---|---|---|---|
| | Вид самост. работы | Сроки выполнения | Затраты времени | | |
| Тема 1. Множества. Теоретико-множественные операции. Отношения и функции. Алгебры, модели и алгебраические системы. | Решение упражнений | Сентябрь | 6 | Проверка материалов электронной форме | Пособие. Электронная форма |
| Тема 2. Исчисление высказываний. | Решение упражнений | Сентябрь – Октябрь | 6 | Проверка материалов электронной форме | Пособие. Электронная форма |
| Тема 3. Теории первого порядка. | Решение упражнений | Октябрь - Ноябрь | 6 | Проверка материалов электронной форме | Пособие. Электронная форма |
| Тема 4. Примитивно рекурсивные функции и рекурсивно перечислимые множества. | Решение упражнений | Ноябрь | 6 | Проверка материалов электронной форме | Пособие. Электронная форма |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Тема 5. Общерекурсивные и частично рекурсивные функции | Решение упражнений | Ноябрь - Декабрь | 4 | Проверка материалов электронной форме | Пособие. Электронная форма |
| Тема 6. Алгоритмы и детерминированные машины Тьюринга | Решение упражнений | Декабрь | 4 | Проверка материалов электронной форме | Пособие. Электронная форма |
| Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.) | | | 32 | | |
| Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.) | | | | | |

### 4.3. Содержание учебного материала

**Тема1. Множества. Теоретико-множественные операции. Отношения и функции.**
Алгебры, модели и алгебраические системы.
Введение. Задание множеств. Парадокс Рассела. Теоретико-множественные операции. Отношения и функции. Алгебры, модели и алгебраические системы.

**Тема2. Исчисление высказываний.**
Интерпретация высказываний. Тавтологии. Полные системы логических связок. Система аксиом для исчисления высказываний. Независимость аксиом. Многозначные логики. Другие аксиоматики.

**Тема3. Теории первого порядка**
Формулы. Интерпретация формул. Система аксиом. Теорема дедукции. Теорема полноты. Теорема компактности.

**Тема 4. Примитивно рекурсивные функции и рекурсивно перечислимые множества.**
Основные вычислимые операторы. Оператор суперпозиции частичных функций. Оператор примитивной рекурсии. Операция минимизации. Операция слабой минимизации и общерекурсивные функции.

**Тема 5. Общерекурсивные и частично рекурсивные функции**
Общерекурсивные функции и рекурсии 2-ой ступени. Зависимости между операторами примитивной рекурсии и минимизации. Универсальная общерекурсивная функция. Частично рекурсивные функции. Параметризация частично рекурсивных функций. Универсальные частично рекурсивные функции.

**Тема 6. Алгоритмы и детерминированные машины Тьюринга**
Определение детерминированной машины Тьюринга. Вычислимые функции. Машины Тьюринга с заданными свойствами, включая универсальные.

#### 4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

| Тема занятия | Всего часов | Оценочные средства | Формируемые компетенции |
|---|---|---|---|
| Тема 1. Множества. Теоретико-множественные операции. Отношения и функции. Алгебры, модели и алгебраические системы. | 6 | Контрольная | ОПК-1 |
| Тема 2. Исчисление высказываний. | 6 | Контрольная | ОПК-1 |
| Тема 3. Теории первого порядка. | 6 | Контрольная | ОПК-1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Тема 4. Примитивно рекурсивные функции и рекурсивно перечислимые множества. | 6 | Контрольная | ОПК-1 |
| Тема 5. Общерекурсивные и частично рекурсивные функции | 4 | Контрольная | ОПК-1 |
| Тема 6. Алгоритмы и детерминированные машины Тьюринга | 4 | Контрольная | ОПК-1 |

### 4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

| Тема | Задание | Формируемые компетенции |
|---|---|---|
| Тема 1 Аксиоматическая теория множеств | Классы множеств | ОПК-1 |
| Тема 2. Исчисление высказываний. | Проверка выполнимости | ОПК-1 |
| Тема 3. Теории первого порядка. | Секвенциальные исчисления | ОПК-1 |

### 4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

– закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;
– приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
– формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
– развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;
– развитие навыков самоорганизации;
– формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
– выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

**Подготовка к лекции.** Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к практическому занятию.** Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной

деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к семинарскому занятию.** Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к коллоквиуму.** Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к контрольной работе.** Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

**Подготовка к зачету.** Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами,

которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуется делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

**Подготовка к экзамену.** Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

## 5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) основная литература:

Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов [Текст] : методические указания / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. - 5-е изд., испр. - М. : Физматлит, 2006. - 255 с. ; 20 см. - Библиогр.: с. 248-249. - Предм. указ.: с. 250-255. - **ISBN** 5-9221-0026-2 (42 шт.)

б) дополнительная литература:

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику: Пер. с англ./Под ред. С.И. Адяна. – 3-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 320с. (10 шт.)
2. Математическая логика [Текст] : научное издание / С. К. Клини ; Пер. с англ. Ю. А. Гастева, ред. Г. Е. Минц. - 2-е изд., стер. - М. : Едиториал УРСС, 2005. - 480 с. ; 21 см. - Библиогр.: с.451-465 . - Предм. указ.: с.470-478 . - Пер. изд. : Mathematical logic / Cole Kleene Stephen. - ISBN 5-354-01011-x (11 шт.)
3. Математическая логика [Текст] : учеб. пособие для студ. мат. спец. вузов / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин ; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. - 2-е изд., стер. - М. : Едиториал УРСС, 2005. - 238 с. ; 22 см. - (Классический университетский учебник). - Библиогр.: с. 228. - Указ.: с. 229-236. - **ISBN** 5-354-01003-9 (9 шт.)

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

### 6.2. Программное обеспечение

ПЕРЕЧИСЛИТЬ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТРЕБУЕМОЕ ДЛЯ ДИСЦИПЛИНЫ

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Оценочные средства текущего контроля

| Вид контроля | Контролируемые темы | Контролируемые компетенции |
|---|---|---|
| Контрольная работа 1 | Тема 1. Множества. Теоретико-множественные операции. Отношения и функции. Алгебры, модели и алгебраические системы. | ОПК-1 |
| Контрольная работа 2 | Тема 2. Исчисление высказываний. | ОПК-1 |
| Контрольная работа 3 | Тема 3. Теории первого порядка. | ОПК-1 |
| Контрольная работа 4 | Тема 4. Примитивно рекурсивные функции и рекурсивно перечислимые множества. | ОПК-1 |
| Контрольная работа 5 | Тема 5. Общерекурсивные и частично рекурсивные функции | ОПК-1 |
| Контрольная работа 6 | Тема 6. Алгоритмы и детерминированные машины Тьюринга | ОПК-1 |

**Примеры оценочных средств текущего контроля**

Контрольная работа по теме 1.

1. Доказать, что для произвольных множеств выполняется

$$A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \neg B \cup C.$$
$$A \ \Delta \ (B \ \Delta \ C) = (A \ \Delta \ B) \ \Delta \ C.$$
$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \setminus C)$$

2. Какими свойствами обладает отношение, определенное на множестве всех прямых плоскости, если

$$x \ \rho \ y \Leftrightarrow x \text{ пересекается с } y$$

3. Найдите обратное отношение к отношению “быть матерью”.
4. Найдите все отображения множества A={3, 4} в себя, определите какие из них инъективные, сюръективные?

Контрольная работа по теме 2.

1. Определить является ли формула тавтологией

$$((P \supset Q) \ \& \ (R \supset Q)) \sim ((P \vee R) \supset Q)$$

2. Доказать выполнимость формулы

$$\neg(P \supset \neg P).$$

3. Выяснить полна ли система связок дизъюнкция, конъюнкция, импликация.
4. Выяснить при каких значениях переменных формула ложна

$$((X \supset (Y \ \& \ Z)) \supset (\neg Y \supset \neg X)) \supset \neg Y$$

Контрольная по теме 3.

1. Перевести с естественного языка на язык предикатов:
   не все студенты художники или футболисты.
2. Перевести на естественный язык

$$\forall x \ (x \neq a \ \& \ x \neq b \supset f(x) \neq 0)$$

3. Перевести на естественный язык: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.
4. Путник на острове рыцарей и лжецов встретил человека, который произнес высказывание: если на острове есть лжецы, то я лжец. Есть ли на острове лжецы?

Контрольная работа по теме 4

1. Пользуясь определением доказать, что функция f(x)=x! Является примитивно рекурсивной.
2. Доказать примитивную рекурсивность функции f(x,y)=x*y.
3. Примести пример не примитивно рекурсивной функции.

Контрольная работа по теме 5

1. Является ли функция f(x,y)=x+y частично рекурсивной?
2. Является ли функция f(x,y)=|x-y| частично рекурсивной?
3. Привести пример не частично рекурсивной функции.

Контрольная работа по теме 6.

1. Построить МТ, которая умножает любые два числа записанные в дополнительной унарной записи.

**7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации**

**Список вопросов для промежуточной аттестации:**

**1. Множества. Теоретико-множественные операции. Отношения и функции.**
Алгебры, модели и алгебраические системы.
Введение. Задание множеств. Парадокс Рассела. Теоретико-множественные операции. Отношения и функции. Алгебры, модели и алгебраические системы.
**2. Исчисление высказываний.**
Интерпретация высказываний. Тавтологии. Полные системы логических связок. Система аксиом для исчисления высказываний. Независимость аксиом. Многозначные логики. Другие аксиоматики.
**3. Теории первого порядка**
Формулы. Интерпретация формул. Система аксиом. Теорема дедукции. Теорема полноты. Теорема компактности.
**4. Примитивно рекурсивные функции и рекурсивно перечислимые множества.**
Основные вычислимые операторы. Оператор суперпозиции частичных функций. Оператор примитивной рекурсии. Операция минимизации. Операция слабой минимизации и общерекурсивные функции.
**5. Общерекурсивные и частично рекурсивные функции**
Общерекурсивные функции и рекурсии 2-ой ступени. Зависимости между операторами примитивной рекурсии и минимизации. Универсальная общерекурсивная функция. Частично рекурсивные функции. Параметризация частично рекурсивных функций. Универсальные частично рекурсивные функции.
**6. Алгоритмы и детерминированные машины Тьюринга**
Определение детерминированной машины Тьюринга. Вычислимые функции. Машины Тьюринга с заданными свойствами, включая универсальные.

**Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:**

Пример экзаменационного билета

Теоретическая часть

1. Доказать теорему о полноте логических связок. Привести примеры.

Практическая часть

1. Определить является ли формула тавтологией

$$((P \supset Q) \ \& \ (R \supset Q)) \sim ((P \vee R) \supset Q)$$

2. Пользуясь определением доказать, что функция f(x)=x! является примитивно рекурсивной.
3. Построить МТ, которая умножает любые два числа записанные в дополнительной унарной записи.

Разработчик: **Мартьянов Владимир Иванович**, доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры теории вероятностей и дискретной математики