



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФГБОУ ВО «ИГУ»
Кафедра теории вероятностей и дискретной математики

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор ИМИТ ИГУ

М. В. Фалалеев
«25» мая 2022 г.


РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля): Б1.О.18 Теория вероятностей и математическая статистика

Направление подготовки: 09.03.03 Прикладная информатика

Направленность (профиль) подготовки: Проектирование и разработка информационных систем

Квалификация выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная


Иркутск 2022 г.

Согласовано с УМК Института математики
и информационных технологий
Протокол № 3 от «04» апреля 2022 г.

Председатель _____

Антоник В.Г.

Рекомендовано кафедрой теории
вероятностей и дискретной математики
ИМИТ ИГУ:
Протокол № 6 От «7» марта 2022 г.

Зав. кафедрой _____

Кузьмин О.В.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели: формирование у будущего бакалавра теоретических знаний и практических навыков по применению теории вероятностей и математической статистики для решения прикладных задач.

Задачи:

- изучить вопросы построения математических моделей случайных экспериментов;
- выработать навыки применения изученных методов при решении практических задач;
- показать студентам универсальный характер вероятностных и статистических методов для получения комплексного представления при создании математических моделей изучаемых систем и объектов.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.18 Теория вероятностей и математическая статистика относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: математика, линейная алгебра.

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: экономика, информационная безопасность, криптография.

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика:

ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен знать:

- теоретические основы теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов;
- определения и свойства математических объектов в этой области;
- формулировки основных утверждений, методы их доказательства;
- возможные сферы их приложений, методы применения на практике.

уметь:

- решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов;
- доказывать основные утверждения;
- проводить статистический анализ данных и оценивать погрешность и достоверность результатов.

владеть:

- математическим аппаратом теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов;
- методами решения задач и доказательства утверждений в этой области;
- методами статистической обработки данных.

4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 4 зачетных ед., 144 час.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися			Самост. работа	
		Лекции	Лаб. занятия	Практ. занятия		
Предмет теории вероятностей		2		2		
Случайные события		4		4	4/4	Самост. работа Контрольная работа
Случайные величины		8		8	8/8	Семестровое задание Контрольная работа
Случайные векторы		6		6	6/6	Самост. работа
Предельные теоремы теории вероятностей		4		4	4/5	Самост. работа
Основные понятия случайных процессов		2		2	2/3	Устный опрос
Основы математической статистики		8		8	7/9	Практическая работа
Итого (5 семестр):		34		34	31/35	экзамен.

4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самост. работы
	Вид самост. работы	Сроки выполнения	Затраты времени		
Случайные события	Подготовка к самост. и контрольной работе	2-3 неделя	4	Самост. работа Контрольная работа	https://educa.isu.ru/course/view.php?id=42446
Случайные величины	Выполнение семестрового задания Подготовка к контрольной работе	4-7 неделя	8	Семестровое задание. Защита. Контрольная работа	https://educa.isu.ru/course/view.php?id=42446
Случайные векторы	Подготовка к самост. работе	8-10 неделя	6	Домашняя контрольная работа	https://educa.isu.ru/course/view.php?id=42446

Предельные теоремы теории вероятностей	Подготовка к самост. работе	11-12 неделя	4	Самост. работа	https://educa.isu.ru/course/view.php?id=42446
Основные понятия случайных процессов	Подготовка к устному опросу	13 неделя	2	Устный опрос	https://educa.isu.ru/course/view.php?id=42446
Основы математической статистики	Выполнение и подготовка к защите практической работы	14-17 неделя	7	Практическая работа. Защита	https://educa.isu.ru/course/view.php?id=42446
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			31		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)					

4.3. Содержание учебного материала

1. Предмет теории вероятностей

Предмет теории вероятностей. Элементы комбинаторики.

2. Случайные события

Соотношения между событиями. Поле событий.

Классическое определение вероятностей. Свойства вероятностей. Геометрическое определение вероятностей. Статистический подход к определению вероятностей.

Теорема сложения вероятностей. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Схема Бернулли. Теорема Муавра-Лапласа. Теорема Пуассона.

3. Случайные величины

Определение случайных величин. Спектр случайной величины. Типы случайных величин. Законы распределения. Функция распределения, ее основные свойства. Вероятность попадания случайной величины на заданный интервал. Функция плотности вероятности, ее свойства. Зависимые и независимые случайные величины. Математическое ожидание случайной величины. Математическое ожидание от функции случайных аргументов. Основные теоремы о математическом ожидании. Дисперсия. Основные теоремы о дисперсии. Понятие о моментах высших порядков. Асимметрия. Эксцесс. Равномерное распределение. Экспоненциальное распределение. Распределение Пуассона. Биномиальное распределение. Нормальный закон распределения и его свойства.

4. Случайные векторы

Случайные векторы. Числовые характеристики случайного вектора. Условные распределения и условные математические ожидания. Понятие о корреляции. Коэффициент корреляции. Корреляционная матрица.

5. Предельные теоремы теории вероятностей

Неравенство Чебышева. Сходимости по вероятности. Понятие о законе больших чисел. Теоремы Маркова, Чебышева, Пуассона, Бернулли. Закон распределения суммы случайных величин. Центральная предельная теорема Ляпунова.

6. Основные понятия случайных процессов

Случайные процессы с дискретным и непрерывным временем. Марковские процессы. Пуассоновский процесс. Нахождение характеристик случайных процессов.

7. Основы математической статистики

Задачи математической статистики. Приемы построения эмпирических законов распределения.

4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Предмет теории вероятностей	2		
Случайные события	4	Самост. работа Контрольная работа	ОПК-1
Случайные величины	8	Семестровое задание Контрольная работа	ОПК-1
Случайные векторы	6	Домашняя контрольная работа	ОПК-1
Предельные теоремы теории вероятностей	4	Самост. работа	ОПК-1
Основные понятия случайных процессов	2	Устный опрос	ОПК-1
Основы математической статистики	8	Практическая работа	ОПК-1

4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Случайные события	Подготовка к самостоятельной и контрольной работе	ОПК-1
Случайные величины	Выполнение семестрового задания Подготовка к контрольной работе	ОПК-1
Случайные векторы	Домашняя контрольная работа	ОПК-1
Предельные теоремы теории вероятностей. ЗБЧ	Подготовка к самостоятельной работе	ОПК-1
Основные понятия случайных процессов	Подготовка к устному опросу	ОПК-1
Основы математической статистики	Сбор статистического материала и выполнение практической работы	ОПК-1

4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

- закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;
- приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
- формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
- развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;

- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

Подготовка к лекции. Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к практическому занятию. Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к семинарскому занятию. Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к коллоквиуму. Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к контрольной работе. Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они

заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

Подготовка к зачету. Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуется делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

Подготовка к экзамену. Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов / В.Е. Гмурман. - 11-е изд., стер. - М.: Высш. шк., 2005. - 479 с.: ил; 22 см. - Предм. указ.: с. 474-479. - ISBN 5-06-004214-6 21экз
2. Докин В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Н. Докин, Т. Г. Тюрнева. – Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2007. – 183 с. ISBN 978-5-9624- 0141-6. – 93 экз.+
3. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций, 3-е изд., перераб. / Под общей ред. А.А. Свешникова. – СПб.: Лань, 2007. – 448 с. – 35 экз. +

4. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] / Б. А. Горлач. - Электрон. текстовые дан. - Москва : Лань, 2013. - ЭБС "Лань". - неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-1429-1

5. Теория вероятностей и математическая статистика в 2 ч. Часть 1. Теория вероятностей [Электронный ресурс]: Учебник и практикум / Н. Ш. Кремер. - 4-е изд., пер. и доп. - Электрон. текстовые дан. - М.: Издательство Юрайт, 2017. - 264 с. - (Бакалавр. Академический курс). - ЭБС "Юрайт". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-534-01925-4

Теория вероятностей и математическая статистика в 2 ч. Часть 2. Математическая статистика [Электронный ресурс]: Учебник и практикум / Н. Ш. Кремер. - 4-е изд., пер. и доп. - Электрон. текстовые дан. - М.: Издательство Юрайт, 2017. - 254 с. - (Бакалавр. Академический курс). - ЭБС "Юрайт". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-534-01926-1

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

1. НБ ИГУ <http://library.isu.ru/ru>
2. ЭЧЗ «Библиотех» <https://isu.bibliotech.ru/>
3. ЭБС «Лань» <http://e.lanbook.com/>
4. ЭБС «Рукопт» <http://rucont.ru>
5. ЭБС «Айбукс» <http://ibooks.ru>
6. ЭБС «Юрайт»
7. Образовательный портал ИГУ <http://educa.isu.ru/>

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

6.2. Программное обеспечение

Пакет *Excel*

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции
Самостоятельная работа	Случайные события. Предельные теоремы теории вероятностей	ОПК-1
Контрольная работа	Случайные события. Случайные величины. Случайные векторы.	ОПК-1
Семестровое задание	Случайные величины	ОПК-1

Практическая работа	Основы математической статистики	ОПК-1
Устный опрос	Основные понятия случайных процессов	ОПК-1

Примеры оценочных средств текущего контроля

1. Самостоятельная работа

*Демонстрационный вариант самостоятельной работы
(тема: Случайные события)*

1. Записать словесно противоположные события для $A = \{\text{среди трёх билетов лотереи по крайней мере два выигрышных}\}$ и $B = \{\text{среди четырех юношей два семнадцатилетних}\}$.
2. В очереди три человека. Событие $A_i = \{i\text{-ым в очереди стоит мужчина}\}$, $i=1,2,3$. Записать алгебраически и показать на диаграмме Эйлера – Венна события $A = \{\text{в очереди все не мужчины}\}$, $B = \{\text{в очереди более одного мужчины}\}$, $C = \{\text{в очереди хотя бы один не мужчина}\}$, $D = \{\text{в очереди только один мужчина}\}$.
3. Событие $A = \{\text{выигрыш по билету одной лотереи}\}$, событие $B = \{\text{выигрыш по билету другой лотереи}\}$. Что означают события $\overline{A+B}$, $\overline{A+B}$, $\overline{A \cdot B}$, $\overline{A \cdot B}$?

*Демонстрационный вариант самостоятельной работы
(тема: Предельные теоремы теории вероятностей)*

1. Среднее число молодых специалистов, ежегодно направляемых в аспирантуру, составляет 200 человек. Оценить вероятность того, что в данном году будет направлено в аспирантуру не более 220 молодых специалистов.

2. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что нормально распределенная случайная величина отклонится от своего математического ожидания на величину, большую трех среднеквадратических отклонений. Сравнить с точной оценкой.

3. Установить, будут ли выполнены достаточные условия применимости закона больших чисел в форме Чебышева для последовательности взаимно независимых случайных величин $\{X_k\}$, с распределениями, задаваемыми формулами ($k=1,2, \dots$):

$$P(X_k = \pm 2^k) = 2^{-(2k+1)}, P(X_k = 0) = 1 - 2^{-2k}.$$

4. В страховой компании застраховано 10 000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля равна 0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12 руб. страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от компании 1000 руб. Найти вероятности следующих событий:

$$A = \{\text{по истечении года работы страховая компания потерпит убыток}\}, \\ B = \{\text{страховая компания получит прибыль не менее чем 40 000руб.}\}.$$

2. Контрольная работа

*Демонстрационный вариант контрольной работы
(тема: Случайные события)*

1. Из шести карточек, образующих слово «ЛИТЕРА», наудачу выбирают четыре и выкладывают слева направо. Найдите вероятность $P(A)$ того, что в результате получится слово «ТИРЕ».
2. В партии из 12 изделий три нестандартных. Определите вероятности того, что среди выбранных наугад двух изделий окажется:

хотя бы одно нестандартное изделие;

ровно два нестандартных изделия.

3. Из колоды в 36 карт, наугад извлекают одну. Событие $A = \{\text{извлеченная карта черной масти}\}$, а событие $B = \{\text{извлеченная карта – «дама»}\}$. Определить, являются ли зависимыми события A и B .
4. В каждой из двух урн по 3 белых и 2 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили наудачу два шара, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что переложены белые шары при условии, что из второй урны вынут белый шар.

Демонстрационный вариант контрольной работы

(тема: Случайные величины)

1. Дайте определение случайной величины. Приведите пример.
2. В сейсмоопасной местности создано 100 автоматических сейсмических станций. Каждая станция в течение года может выйти из строя с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что в течение года выйдет из строя 50 станций?
3. Может ли при каком-либо значении аргумента функция плотности распределения быть больше единицы? Ответ поясните.
4. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[a; b]$. Известно, что $MX=2$, $DX=4/3$. Найдите значения a и b .
5. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 3X - 2Y - 5$, если известно, что $MX=1$, $MY=2$, $DX=2$, $DY=3$, величины X и Y независимы.
6. Случайная величина распределена по нормальному закону, $MX=2$, $DX=25$. Найти вероятности $P(1 < X < 3)$, $P(X < 10)$.
7. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,1. Найти наимвероятнейшее число заключенных договоров после 25 визитов.

8. Запишите характеристическую функцию с.в. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$;
 $\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$;

А) запишите характеристическую функцию с.в. $Y=5X + 10$;

Б) запишите характеристическую функцию с.в. $X \sim B(10, 0,6)$. $\sim B(10, 0,6)$.

9. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции:

а) не выше 15,3 ден. ед.;

б) не ниже 15,4 ден. ед.;

в) от 14,4 до 15,6 ден. ед.

С помощью правила трех сигм найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

10. Завод отправил на базу 1000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,001. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно 2; б) более двух; в) хотя бы одно.

Демонстрационный вариант контрольной работы

(тема: Случайные векторы)

1. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в области D , ограниченной снизу осью OX , а сверху кривой $y = \text{Exp}(-x^2)$. Найти совместную плотность распределения $f(x, y)$, плотности распределения X и Y , условные плотности распределения и, основные числовые характеристики величин X и Y , коэффициент корреляции между X и Y .
2. Пусть X и Y – независимые случайные величины, имеющие показательные распределения с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что случайные величины $X - Y$ и $\min\{X, Y\}$ независимы.
3. Заданы следующие характеристики двумерного НОРМАЛЬНОГО вектора: $MX = -2$, $MY = 3$ и ковариационная матрица

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix}$$

Записать выражение для плотности распределения вероятностей $f(x, y)$.

Написать уравнение регрессии Y на X .

3. Семестровое задание

Характеристики основных вероятностных распределений. Моделирование распределений случайных величин.

1. Изучить основные свойства, характеристики и зависимость от параметров следующих распределений:

1. биномиального, 2. пуассоновского, 3. геометрического, 4. равномерного, 5. показательного, 6. нормального, 7. хи-квадрат, 8. Стьюдента, 9. Фишера.

Для каждого из распределений дать определение математической или физической модели, указать область, где оно встречается и используется.

Записать функцию распределения, ряд распределения или плотность распределения, параметры, математическое ожидание, дисперсию, описать особенности формы распределения и асимптотические свойства.

Для своего варианта V , где V -номер студента в списке группы, определить параметры распределений случайных величин.

Функция $V \bmod a$ равна остатку от деления числа V на a .

1. X_1 имеет биномиальное распределение $B(n, p)$.

Параметры определить по формулам:

$$n = \begin{cases} 10, & \text{если } 1 \leq V \leq 10, \\ 15, & \text{если } 10 < V \leq 20. \end{cases} \quad p = \begin{cases} \frac{V \bmod 10}{10}, & \text{если } V \neq 10 \text{ и } V \neq 20, \\ 0,1, & \text{если } V = 10, \\ 0,5, & \text{если } V = 20. \end{cases}$$

2. X_2 имеет распределение Пуассона $\Pi(\lambda)$.

$$\lambda = (V \bmod 3) + 5.$$

3. X_3 имеет геометрическое распределение $G(p)$.

$$p = \begin{cases} \frac{V \bmod 10}{10}, & \text{если } V \neq 10 \text{ и } V \neq 20, \\ 0,1, & \text{если } V = 10, \\ 0,5, & \text{если } V = 20. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{V \bmod 10}{10}, & \text{если } V \neq 10 \text{ и } V \neq 20, \\ 0,1, & \text{если } V = 10, \\ 0,5, & \text{если } V = 20. \end{cases}$$

4. X_4 имеет равномерное распределение $R(a, b)$.

$$a = (V \bmod 10) - 9 \quad b = a + 10.$$

5. X_5 имеет экспоненциальное распределение $Ex(\lambda)$.

$$\lambda = \begin{cases} \frac{V \bmod 10}{10}, & \text{если } V \neq 10 \text{ и } V \neq 20, \\ 0,1, & \text{если } V = 10, \\ 0,5, & \text{если } V = 20. \end{cases}$$

6. X_6 имеет нормальное распределение $N(m, \sigma^2)$.

$$m = (V \bmod 10) - 5, \quad \sigma^2 = (V \bmod 3) + 1.$$

7. X_7 имеет распределение хи-квадрат $\chi^2(k)$

$$k = (V \bmod 10) + 7.$$

8. X_8 имеет распределение Стьюдента $T(k)$

$$k = (V \bmod 10) + 2.$$

9. X_9 имеет распределение Фишера $F(k_1, k_2)$

$$k_1 = (V \bmod 10) + 7,$$

$$k_2 = (V \bmod 5) + 8.$$

2. Выполнить следующие расчеты:

1. Для каждого из распределений определить точные значения математического ожидания и дисперсии.

2. Для непрерывных распределений вычислить значения квантилей порядков 0,25; 0,5.

3. Вычислить и показать на графиках плотности распределений соответствующие

вероятности $p_k = P\{|X - MX| < k\sigma\}$, где $k = 1, 2, 3$.

$p_k = P\{|X - MX| < k\sigma\}$, где $k = 1, 2, 3$.

Для распределений 4, 5, 6.

3. Практическая работа

1. Провести эксперимент, записать результаты наблюдений в порядке их регистрации.
2. Записать выборку в виде вариационного и статистического рядов.
3. Представить выборку в виде таблицы частот.
4. Построить гистограмму и полигон частот.
5. Построить график эмпирической функции распределения.
6. Вычислить моду, медиану, среднее и дисперсию, k -ты асимметрии и эксцесса для группированной выборки.
7. Проанализировать полученные результаты.

4. Устный опрос

Вопросы для подготовки

1. Понятие случайного процесса. Классификация случайных процессов.
2. Основные характеристики случайного процесса: математическое ожидание; дисперсия; корреляционная функция.
3. Стационарный случайный процесс в узком и широком смысле.
4. Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов.
5. Дифференцирование и интегрирование случайных процессов.
6. Спектральное разложение стационарного случайного процесса.
7. Спектральная плотность случайного процесса.
8. Стационарный белый шум.
9. Понятие марковского случайного процесса.
10. Дискретный марковский процесс. Цепь Маркова.
11. Анализ структуры цепи Маркова. Существенные и несущественные состояния.
12. Алгоритм построения множества существенных состояний и его разбиения на классы эквивалентности.
13. Понятие о непрерывном марковском процессе. Уравнения Колмогорова.

7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Список вопросов для промежуточной аттестации:

Допуск к экзамену:

Выполненная и защищенная семестровая работа и практическая работа.

Знать определения следующих понятий:

вероятность, событие, размещение, сочетание, перестановка, сумма событий, произведение событий, разность событий, противоположное событие, несовместные события, совместные события, независимые события, зависимые события, условная вероятность, случайная величина, функция распределения, функция плотности, математическое ожидание, дисперсия, с.к.о., центральный момент, начальный момент, система случайных величин, ковариация, коэффициент корреляции, регрессия, характеристическая функция, ЗБЧ, статистика, статистическая оценка: точечная и интервальная, статистическая гипотеза.

Уметь доказать или вывести следующие соотношения и формулы:

1. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
2. Если $P(AB) = P(A)P(B)$, то А и \overline{B} - независимые события.
3. Характеристические функции распределений.
4. $D(X + Y) = DX + DY + 2cov(X, Y)$
5. $cov(X, Y) = MXY - MX \cdot MY$.
6. $MXY = MX \cdot MY + cov(X, Y)$
7. Если $C = const$, то $cov(X, C) = 0$.
8. $cov(C_1X_1 + C_2X_2, Y) = C_1cov(X_1, Y) + C_2cov(X_2, Y)$
9. $|cov(X, Y)| \leq \sqrt{DX \cdot DY} \leq \sqrt{DX \cdot DY}$
10. $|\rho_{XY}| \leq 1$

Вопросы к экзамену по теории вероятностей и математической статистике

1. Элементы комбинаторики (размещения, перестановки, сочетания).
2. Случайные события и их классификация.
3. Классическое определение вероятности.
4. Статистическое определение вероятности. Свойство статистической устойчивости относительной частоты. ЗБЧ в форме Я.Бернулли.
5. Геометрическая вероятность.
6. Действия над событиями. Диаграммы Венна.
7. Теорема сложения вероятностей. Вероятность противоположного события.
8. Условные вероятности. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей.
9. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
10. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.
11. Наивероятнейшее число появлений события.
12. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Локальная предельная теорема Муавра - Лапласа.
13. Предельные теоремы в схеме Бернулли Интегральная предельная теорема Муавра - Лапласа.
14. Предельные теоремы в схеме Бернулли Редкие события. Теорема Пуассона.
15. Понятие случайной величины и закона ее распределения. Виды случайных величин (дискретные, непрерывные).
16. Функция распределения случайной величины и ее свойства.
17. Понятие дискретной случайной величины и ее закона распределения. Многоугольник распределения. Примеры.
18. Функция распределения дискретной случайной величины и ее график.
19. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства.
20. Дисперсия дискретной случайной величины и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение.
21. Непрерывная случайная величина и функция ее распределения.
22. Плотность распределения вероятностей случайной величины и ее свойства.
23. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.
24. Моменты случайных величин. Асимметрия и эксцесс.
25. Биномиальный закон распределения и его числовые характеристики.
26. Закон Пуассона и его числовые характеристики.
27. Гипергеометрическое распределение.
28. Геометрическое распределение.
29. Равномерный закон распределения.
30. Показательный закон распределения.
31. Нормальный закон распределения.

32. Вероятностный смысл параметров нормального распределения.
33. Кривая Гаусса. Влияние изменения параметров a и σ^2 на форму нормальной кривой.
34. Функция Лапласа и ее свойства.
35. Вероятность попадания с.в. $X \sim N(a, \sigma^2)$ на заданный промежуток. Правило трех сигм и его значение для практики.
36. Нормальное распределение с параметрами $a=0, \sigma^2=1$.
37. Понятие о системе случайных величин и законе ее распределения.
38. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства.
39. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее свойства.
40. Зависимость и независимость двух случайных величин.
41. Условные законы распределения.
42. Ковариация двух случайных величин. Свойства ковариации.
43. Коэффициент корреляции двух случайных величин. Свойства коэффициента корреляции.
44. Двумерное нормальное распределение.
45. Регрессия.
46. Характеристическая функция и ее свойства.
47. Функции случайных величин. Функция одного случайного аргумента.
48. Распределение суммы независимых случайных величин.
49. Распределение функций нормальных случайных величин. Распределение χ^2 (хи-квадрат или Пирсона).
50. Распределение функций нормальных случайных величин. Распределение Стьюдента.
51. Распределение функций нормальных случайных величин. Распределение Фишера-Снедекора.
52. Предельные теоремы теории вероятностей. Неравенство Чебышева.
53. Предельные теоремы теории вероятностей. Закон больших чисел в форме Чебышева.
54. Понятие о центральной предельной теореме и ее следствиях.
55. ЦПТ для независимых, одинаково распределенных случайных величин.
56. Основные задачи математической статистики

Пример экзаменационного билета

БИЛЕТ 1

1. Классическое определение вероятности.
2. Докажите, что $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{DX \cdot DY} \sqrt{DX \cdot DY}$.
3. Биномиальный закон распределения и его числовые характеристики.
4. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения

Y_j/X_i	0	1	2
-2	0,5	0,2	0,1
2	0,1	0	0,1

Найти ковариацию и коэффициент корреляции.

5. ЦПТ для независимых, одинаково распределенных случайных величин.

Разработчик: Тюрнева Татьяна Геннадьевна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры теории вероятностей и дискретной математики ИГУ