МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «ИГУ»)

Институт математики и информационных технологий

Кафедра вычислительной математики и оптимизации

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор ИМИТ ИГУ
_____ М. В. Фалалеев
«25» мая 2022 г.

Рабочая программа дисциплины (модуля)

Б1.О.18 Методы оптимизации

Направление подготовки	01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) подготовки	Прикладная математика и информатика
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная

Иркутск 2022 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели: изучение и освоение студентами теоретических основ и методов решения задач линейного и нелинейного программирования, вариационного исчисления и оптимального управления; формирование навыков построения, исследования и решения математических моделей в конкретных прикладных областях, в том числе, с использованием современных компьютерных средств и прикладного программного обеспечения.

Задачи: изучение различных типов задач линейного программирования (ЛП) и основных сфер их применения (экономика, финансы, технические приложения, математические задачи, сводящиеся к задачам ЛП); изучение теории и методов решения задач ЛП; освоение технологии решения и постоптимального анализа задач ЛП с использованием прикладных математических пакетов; изучение теории и численных методов решения задач нелинейного программирования; овладение практическими навыками реализации алгоритмов оптимизации и проведения численного эксперимента; изучение основ вариационного исчисления и теории оптимального управления

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.18 Методы оптимизации относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.
Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: «Алгебра», «Математический анализ», «Пакеты компьютерной математики».

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: Методы оптимального управления», «Прикладное математическое моделирование».

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика:
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности;
ОПК-2 Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач;
ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен
знать: теорию и методы решения задач линейного и нелинейного программирования; основы вариационного исчисления и теории оптимального управления.

уметь: понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современные методы решения задач оптимизации; решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая разработку алгоритмических и программных решений; выбирать рациональные варианты действий в практических задачах оптимизации с использованием математических моделей и современных компьютерных технологий.

владеть: навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач оптимизации; методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития явлений и процессов в социальной, экономической и производственной сферах; четким пониманием проблематики и перспектив развития теории и методов оптимизации как одного из важнейших направлений.

4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 7 зачетных ед., 252 час.

Форма промежуточной аттестации: зачет с оценкой, экзамен.

4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися			Самост. работа	
		Лекции	Лаб. занятия	Практ. занятия		
Введение	3	5		5	2	Проверка дом.работы; Сам.работа №1
Тема 1. Элементы выпуклого анализа	3	7		7	10	Проверка дом.работы; сам.работа №2
Тема 2. Математическое программирование	3	10		10	10	Проверка дом.работы; сам.работа №3
Тема 3. Численные методы математического программирования (ЛП)	3	12		12	10	Проверка дом.работы; сам.работа №4
Тема 3. Численные методы математического программирования (НЛП)	4	11		11	13	Проверка дом.работы; сам.работа №5
Тема 4. Вариационное исчисление	4	10		10	11	Проверка дом.работы; сам.работа №6
Тема 5. Оптимальное управление	4	11		11	11	Проверка дом.работы; сам.работа №7
Итого (3 семестр):		34		34	32	зач.с оц.
Итого (4 семестр):		32		32	35	экз.

4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самост. работы
	Вид самост. работы	Сроки выполнения	Затраты времени		
Введение	Выполнение дом.работы	После изучения темы	2	Проверка дом.работы	Список литературы прилагается

Тема 1. Элементы выпуклого анализа	Выполнение дом.работы	После изучения темы	10	Проверка дом.работы	Список литературы прилагается
Тема 2. Математическое программирование	Выполнение дом.работы	После изучения темы	10	Проверка дом.работы	Список литературы прилагается
Тема 3. Численные методы математического программирования (ЛП)	Выполнение дом.работы	После изучения темы	10	Проверка дом.работы	Список литературы прилагается
Тема 3. Численные методы математического программирования (НЛП)	Выполнение дом.работы	После изучения темы	13	Проверка дом.работы	Список литературы прилагается
Тема 4. Вариационное исчисление	Выполнение дом.работы	После изучения темы	11	Проверка дом.работы	Список литературы прилагается
Тема 5. Оптимальное управление	Выполнение дом.работы	После изучения темы	11	Проверка дом.работы	Список литературы прилагается
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			67		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)					

4.3. Содержание учебного материала

Введение

Принципы и примеры моделирования экономических и технических проблем в форме задач оптимизации:

- задачи линейного программирования и проблемы экономики;
- классическое вариационное исчисление и естествознание;
- оптимальное управление и задачи техники.

Экстремумы функций многих переменных. Классические условия экстремума – теорема Ферма и правило множителей Лагранжа.

Постановка задачи математического программирования. Геометрическая интерпретация.

Тема 1. Элементы выпуклого анализа

Выпуклые множества и функции.

Экстремальные свойства выпуклых функций.

Проекция точки на множество.

Тема 2. Математическое программирование

Условие оптимальности в задаче минимизации на простом множестве.

Выпуклое программирование; теорема Куна-Таккера.

Гладкие задачи с равенствами и неравенствами; принцип Лагранжа.

Теория двойственности в математическом программировании.

Двойственные задачи линейного и квадратичного программирования.

Тема 3. Численные методы математического программирования

Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

Градиентный метод и метод Ньютона для задач без ограничений.

Минимизация на простых множествах – методы условного градиента и проекции градиента. Решение вспомогательных задач.

Методы последовательной безусловной минимизации – штрафных и барьерных функций, модифицированных множителей Лагранжа.

Тема 4. Вариационное исчисление

Классическое вариационное исчисление; уравнение Эйлера; задачи классического вариационного исчисления с ограничениями; необходимые условия в изопериметрической задаче, задачи вариационного исчисления с подвижными границами.

Тема 5. Оптимальное управление

Принцип максимума Л.С. Понтрягина. Достаточность принципа максимума. Линеаризованный (дифференциальный) принцип максимума. Проверка управлений на оптимальность с помощью принципа максимума.

Оптимальное управление линейными системами.

Градиент в основной задаче оптимального управления. Понятие о градиентных методах решения задач оптимального управления.

Связь вариационного исчисления и оптимального управления. Прикладные задачи оптимального управления.

Численные методы решения задач вариационного исчисления и оптимального управления.

4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Введение	5	Сам.работа №1	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 1. Элементы выпуклого анализа	7	Сам.работа №2	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 2. Математическое программирование	10	Сам.работа №3	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 3. Численные методы математического программирования	23	Сам.работа №4,5	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 4. Вариационное исчисление	10	Сам.работа №6	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 5. Оптимальное управление	11	Сам.работа №7	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Введение	Домашнее задание	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 1. Элементы выпуклого анализа	Домашнее задание	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 2. Математическое программирование	Домашнее задание	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 3. Численные методы математического программирования	Домашнее задание	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 4. Вариационное исчисление	Домашнее задание	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 5. Оптимальное управление	Домашнее задание	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

– закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;
– приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
– формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
– развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;
– развитие навыков самоорганизации;
– формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
– выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

Подготовка к лекции. Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к практическому занятию. Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к семинарскому занятию. Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск

дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к коллоквиуму. Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к контрольной работе. Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

Подготовка к зачету. Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуется делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

Подготовка к экзамену. Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) основная литература:

1. Аргучинцев А.В. Введение в оптимизацию: Учеб.пособие / А.В.Аргучинцев, А.И.Беников. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2011. – 105 с. (50 экз.)
2. Аргучинцев А.В. Линейное программирование: практикум / А.В.Аргучинцев, А.И.Беников. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2011. – 73 с. (50 экз.)
3. Поплевко В.П. Методы оптимизации в системе Matlab: Учеб.пособие / В.П.Поплевко. – Иркутск: Иркут.гос. ун-т, 2012. – 106 с. (45 экз.)
4. Васильев О.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях [Текст] : учеб.пособие / О.В. Васильев, А.В. Аргучинцев. - М. : Наука:Физ.-мат.лит, 1999. - 207 с. ; 22см. - ISBN 5922100068 (90 экз.)
5. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. – Иркутск, Иркут.гос. ун-т, 1994. – 344 с. (70 экз.).
6. Измаилов А. Ф. Численные методы оптимизации: Учеб.пособие / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с. (30 экз.).
7. Сухарев А. Г. Методы оптимизации : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2022. — 367 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/507818 (подписка ИГУ).
8. Методы оптимизации: учебник и практикум для вузов / Ф. П. Васильев, М. М. Потапов, Б. А. Будак, Л. А. Артемьева ; под редакцией Ф. П. Васильева. — М.: Издательство Юрайт, 2022. — 375 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-6157-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/489397 , (подписка ИГУ).
9. Беников А.И. Линейное программирование: Учеб.пособие / А.И. Беников. – Иркутск: Иркут.гос. ун-т, 2005. – 148 с. (50 экз.)
10. Шагин В. Л. Теория игр : учебник и практикум / В. Л. Шагин. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2021. — 223 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-03263-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/469243 (подписка ИГУ).
11. Шиловская Н. А. Теория игр : учебник и практикум для вузов / Н. А. Шиловская. — М.: Издательство Юрайт, 2022. — 318 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8264-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/490360 (подписка ИГУ).

б) дополнительная литература:

-

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

http://educa.isu.ru
http://window.edu.ru
http://ru.wikipedia.org
http://math.ru

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

6.2. Программное обеспечение

“MS Office”, Matlab

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции
Проверка домашней работы	Введение, тема1, тема2, тема3, тема4, тема5	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Сам.работа	Введение, тема1, тема2, тема3, тема4, тема5	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

Примеры оценочных средств текущего контроля

1. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №1

1) Исследовать на экстремум:

$$f(x) = 2\,x_1^3 + 4\,x_2^3 - x_1^2 - 2\,x_2^2 \to extr.$$

2) Исследовать на экстремум:

$$f(x) = x_1^4 + x_2^2 - 4\,x_1\,x_2 \to extr.$$

3) Найти все экстремумы, sup f(x), inf f(x).

$$f(x) = x^2 + 4x + 1, \quad x \in (-3;\ 1].$$

2. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №2

Исследовать на выпуклость функции:

1) $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_2$,
$X \subset E^3$.

2) Исследовать на выпуклость функцию:

$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_2$

$X \subset E^3$.

3. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №3

Решить задачу методом мн. Лагранжа:

$$f(x) = x_2 \to \min,$$
$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 = 0,$$
$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1.$$

Решить задачу методом мн. Лагранжа:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 \to \min,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3.$$

4. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №4

Сделать одну итерацию метода проекции градиента

$$f(x) = x_1^4 + x_2 \to \min,$$
$$0 \le x_1 \le 8,$$
$$-5 \le x_2 \le 1,$$
$$x^0 = (1,0); \varepsilon = 0{,}1.$$

Записать задачу для вычисления шага α_0 метода скорейшего спуска

$$f(x) = {x_1}^2 + 2{x_2}^2 + e^{x_1 - x_2} \to \min,$$
$$x^0 = (1,1); \varepsilon = 0{,}1.$$

Найти проекцию т. $y = (5;1;2;b)$ на множество

$$X = \left\{ x \in R^4 : \left| x_i - b_i \right| \le 1,\ i = \overline{1,4}, \quad b = (3,-1,7,b_4) \right\},$$

b_4 *- число букв в Вашем имени.*

5. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №5

1) Будет ли план x’=(1, 2, 0) – оптимальным в задаче

$$f(x) = 3x_1 - 2x_3 \to \max$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \le 1$$
$$-x_1 - 2x_2 - 2x_3 \ge -5$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3$$

2) Решить с помощью условий равновесия

$$f(x) = 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 \to \min$$
$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 8$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4$$

6. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №6

Найти допустимые экстремали в задаче вариационного исчисления

$$J(x) = \int_0^2 \dot{x}^2(t)\,dt \to \min;\ \ x(0) = 1,\ \ x(2) = 2.$$

$$J(x) = \int_0^1 (\dot{x} - 3t^2)^2\,dt \to min,\ x(0) = x(1) = 0.$$

$$J(x) = \int_1^2 (x+t)^2\,dt \to \min;\ \ x(1) = -1,\ \ x(2) = 1.$$

$$J(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - 2x)\,dt \to \min;\ \ x(0) = 0,\ \ x(1) = -1.$$

$$J(x) = \int_0^{\ln 2} (\dot{x}^2 + 3x^2)e^{2t}\,dt, \quad x(0) = 0, \quad x(\ln 2) = \frac{15}{8}.$$

7. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №7

1) В задаче оптимального управления найти функцию состояния, соответствующую выбранному управлению $v = v(t)$, вычислить значение целевого функционала, записать сопряженную задачу (не решая ее).

$$\dot{x} = u(t),\ \ x(0) = 1;$$

$$-1 \le u(t) \le 1;\ \ t \in [0,5].$$

$$J(u) = x^2(5) + \int_0^5 (x(t) - u(t))dt \to \min;$$

$$v(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,2) \\ 1, & t \in [2,5]. \end{cases}$$

2) Найти оптимальное управление. Является ли принцип максимума Понтрягина достаточным условием оптимальности в задаче? Обосновать ответ.

$$\dot{x} = u(t),\ \ x(0) = 1;$$

$$-1 \le u(t) \le 5;\ \ t \in [0,2].$$

7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Список вопросов для промежуточной аттестации:

1. Максимум и минимум. Супремум и инфимум (определения и связи между этими понятиями). Простейшие свойства максимума (максимум суммы функций; максимум функции, умноженной на константу). Теорема об экстремуме сепарабельной функции.
2. Выпуклые множества. Выпуклые и вогнутые функции, их свойства.
3. Теорема Вейерштрасса и ее следствия.
4. Графический метод решения задач линейного программирования. Линии уровня. Отрезок, луч, прямая в n-мерном пространстве. Привести схематические примеры следующих возможных случаев: множество планов пусто; экстремум достигается на

множестве, состоящем более, чем из одной точки; целевая функция не ограничена сверху на множестве планов. Диапазон применимости графического метода.

5. Свойства задач линейного программирования (выпуклость множества планов для задач в стандартной и канонической формах, глобальность экстремума). Утверждение о достижении экстремума в угловой точке.
6. Угловая точка (определение). Критерий угловой точки (базисного плана) для множества планов задачи линейного программирования в канонической форме. Невырожденные и вырожденные базисные планы.
7. Критерий угловой точки (базисного плана) для множества планов задачи линейного программирования в канонической форме.
8. Симплекс-метод. Улучшение целевой функции. Критерии остановки.
9. Расчетные формулы симплекс-метода. Теоремы об оптимальности базисного плана и неограниченности сверху целевой функции.
10. Двухфазный симплекс-метод. Теорема о начальном базисном плане исходной задачи, определяемом на первой фазе метода.
11. Свойства симметричной пары взаимно-двойственных задач.
12. Условия равновесия в симметричной паре взаимно-двойственных задач. Следствие. Дефицитные и недефицитные ресурсы. Экономический смысл условий равновесия.
13. Свойства несимметричной пары взаимно-двойственных задач.
14. Условия равновесия в несимметричной паре взаимно-двойственных задач. Следствие.
15. Постоптимальный анализ на примере задачи оптимального планирования производства. Изменение компонент вектора прибыли. Определение диапазонов изменения компонент вектора прибыли, при которых оптимальный план остается неизменным. (Будет дан пример на соответствующий раздел постоптимального анализа).
16. Постоптимальный анализ на примере задачи оптимального планирования производства. Связь между вектором решений двойственной задачи и оценками симплекс-метода. Интерпретация двойственных переменных с точки зрения изменения прибыли при изменения запасов сырья. Введение новой переменной. (Будет дан пример на соответствующий раздел постоптимального анализа).
17. Классическое правило множителей Лагранжа для задач с ограничениями типа равенства (формулировка условий первого и второго порядков). Анормальные точки. Достаточность правила множителей. Схема решения задач с ограничениями типа равенства с помощью правила множителей Лагранжа.
18. Численные методы одномерной оптимизации.
19. Метод скорейшего спуска. Условия применимости, схема, геометрическая интерпретация, теорема о сходимости (без доказательства).
20. Теорема о сходимости метода скорейшего спуска.
21. Необходимое условие минимума дифференцируемой функции на выпуклом множестве. Достаточность условия.
22. Экстремум линейной функции на множествах простейшей структуры (вывод формул для многомерного параллелепипеда, шара, эллипсоида).
23. Метод условного градиента. Условия применимости, схема, геометрическая интерпретация, теорема о сходимости (без доказательства).
24. Проекция точки на множество и ее свойства.
25. Проекция точки на множества простейшей структуры (вывод формул для многомерного параллелепипеда, шара, гиперплоскости).
26. Правило множителей Лагранжа в задаче с ограничениями типа неравенства.
27. Правило множителей Лагранжа в общей задаче математического программирования (формулировка). Достаточность правила множителей в линейно-выпуклой задаче математического программирования.

28. Постановка простейшей задачи вариационного исчисления. Сильный и слабый минимум. Уравнение Эйлера.
29. Многомерные и изопериметрические задачи вариационного исчисления. Необходимые условия оптимальности первого порядка.
30. Постановка основной задачи оптимального управления. Терминология. Формулировка принципа максимума.

Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:

1. Демонстрационный вариант экзаменационного билета №1

1) Исследовать на экстремум:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_2 - x_3 + 10 \to extr$$

$$X \subset E^3.$$

2) Решить задачу методом мн. Лагранжа:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 \to \min,\ x_1 + x_2 + x_3 = 3.$$

3) Сделать одну итерацию метода скорейшего спуска

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 \to \min,$$

$$x^0 = (2,0); \varepsilon = 0{,}1.$$

4) Найти решение первой вспомогательной задачи метода условного градиента

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + x_2 \to \min,$$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0,$$

$$x^0 = (1,0); \varepsilon = 0{,}1.$$

2. Демонстрационный вариант экзаменационного билета №2

1) Решить задачу методом Лагранжа

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5$$

2) Найти допустимую экстремаль в следующей задаче вариационного исчисления

$$J(x) = \int_1^2 (x + t)^2\, dt,$$

$$x(1) = -1, \quad x(2) = 0$$

3) В задаче необходимо составить функцию Понтрягина и сопряженную задачу.

$$\Phi(u) = x_1(3) + 2x_2(3) + \int_0^3 x_1(t)u(t)dt \to \min,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2u, \quad x_1(0) = -1, \\ \dot{x}_2 = x_1, \quad x_2(0) = 0, \end{cases}$$

$$u(t) \in U = [-1,1],\ t \in T = [0,3].$$

3. Демонстрационный вариант экзаменационного билета №3

1) Решить графическим методом

$$f(x) = x_1 \to extr, \quad X : \left\{ x_1^2 + x_2^2 \le 1, \quad x_1 \ge x_2^2, \quad x_1 + x_2 \ge 0 \right\}$$

2) Решить задачу:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \to \max,$$

$$X = \left\{ x \in R^4 : |x_i - b_i| \le 1, i = \overline{1,4}, \quad b = (0,1,2,b_4) \right\},$$

b_4 - *число букв в Вашем имени.*

3) Найти допустимые экстремали в задачах

$$1)\ J(x) = \int_1^2 \dot{x}\left(1 + t^2 \dot{x}\right)dt, \quad x(1) = 3, \quad x(2) = 5.$$

4) Найти проекцию т. $y = (b - 2;\ 0;\ -3;\ -2)$ на множество

$$X = \left\{ x \in R^4 : \langle c, x \rangle = 3, \quad c = (2;\ 7 - b;\ -3;\ -2) \right\},$$

b – *число букв в Вашем имени.*

4. Демонстрационный вариант экзаменационного билета №4

1) Решить графически

$f(x) = x_1 - 4x_2 \to \max, \min$

$x_1 + 2x_2 \ge 2,$

$x_1 + x_2 \le 6,$

$x_1 - x_2 \le 0.$

2) Записать задачу в стандартной и канонической формах. Если задача записана в одной из форм, указать это, обосновав ответ.

$f(x) = -4x_1 + x_2 \to \max$

$x_1 + 2x_2 \ge 2,$

$x_1 + x_2 \le 6,$

$x_1 - x_2 \ge 0,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

3) Решить задачу подходящим вариантом симплекс-метода

$f(x) = 8x_1 + 6x_2 + 10x_3 \to \max$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$
$x_j \geq 0$, $j=1,2,3$

Разработчик: Поплевко Василиса Павловна, канд.физ.-мат.наук, доцент кафедры вычислительной математики и оптимизации.