МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФГБОУ ВО «ИГУ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Рабочая программа дисциплины (модуля)

Б1.О.17 Численные методы

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) подготовки Математические методы и информационные технологии

Квалификация выпускника БАКАЛАВР

Форма обучения очная

Иркутск 2019 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели: освоение идейных и теоретических аспектов основных численных методов, формирование конструктивного подхода к исследованию прикладных задач с позиций вычислительной математики и компьютерных ресурсов.

Задачи:
– изучить основные понятия и методы численного решения типовых математических задач;
– овладеть практическими навыками в реализации численных алгоритмов;
– научить основам проведения вычислительного эксперимента, а также анализа численного решения задач прикладного характера.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.17 Численные методы относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.
Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: Алгебра, Математический анализ.

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: научно-исследовательская работа, Производственная практика.

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика:
ОПК-2 Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач;
ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен
знать: основные понятия и методы численного решения типовых математических задач;
уметь: проводить вычислительный эксперимент, а также анализировать численное решение задач прикладного характера;
владеть: практическими навыками в реализации численных алгоритмов.

4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 8 зачетных ед., 288 час.

Форма промежуточной аттестации: зачет с оценкой, экзамен.

4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися			Самост. работа	
		Лекции	Лаб. занятия	Практ. занятия		
Введение						
Линейные системы						
Нелинейные системы						
Численные методы математического анализа						
Численное решение дифференциальных уравнений						
Итого (3 семестр):		34		34	68	зач.с оц.
Итого (4 семестр):		32	16	32	19	экз.

4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самост. работы
	Вид самост. работы	Сроки выполнения	Затраты времени		
Введение					
Линейные системы					
Нелинейные системы					
Численные методы математического анализа					
Численное решение дифференциальных уравнений					
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			87		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)					

4.3. Содержание учебного материала

Тема 1. Введение Предмет и содержание дисциплины. Вычислительная математика: особенности математических вычислений, реализуемых на ЭВМ: представление чисел в форме с фиксированной и плавающей запятой. Диапазон и погрешности представления, операции над числами, свойства арифметических операций; теоретические основы численных методов: погрешности вычислений; устойчивость и сложность алгоритма (по памяти, по времени).

Тема 2. Линейные системы Типы матриц. Квадратичная форма. Критерий Сильвестра. Собственные значения и собственные вектора. Матричное умножение. Понятия векторной

и матричной норм. Основные типы норм. Подчинѐнные и согласованные нормы. Определение линейной системы. Основные типы систем. Вектор невязок. Треугольные системы. Условия реализации и единственности решения. Трудоѐмкость реализации. Численные методы линейной алгебры. Метод Гаусса. Прямой и обратный ход. Условия реализации. Компактная схема метода Гаусса. Построение LU-разложения. Условия реализации. Применения метода Гаусса для вычисления определителя и поиска обратной матрицы. Трудоѐмкость реализации. Разложение Холецкого. Прямой и обратный ход метода. Условия реализации. Трудоѐмкость реализации. Связь относительных погрешностей правых частей линейной системы и еѐ решения. Связь относительных погрешностей матрицы коэффициентов линейной системы и еѐ решения. Число обусловленности: определение и его свойства. Типы матриц. Матрица Гильберта. Процедура улучшения обусловленности. Итерационные методы. Сходимость методов. Приближѐнное решение. Оценка погрешности. Скорость сходимости. Линейная и квадратичная сходимости. Метод простой итерации. Метод простой итерации. Условия сходимости. Оценка погрешности метода. Правило Якоби. Параметризация метода. Метод Зейделя. Достаточное условие сходимости метода. Редукция линейной системы к экстремальной задаче. Градиент функции. Направление спуска. Градиентный метод с постоянным шагом. Оптимальный выбор шага. Связь с числом обусловленности. Метод скорейшего спуска. Оценка сходимости. Метод минимальных невязок. Оценка погрешности. A-сопряжѐнные направления. Метод сопряжѐнных градиентов. Свойство конечности. Метод наименьших квадратов. Псевдорешения системы. Нормальное псевдорешение. Нормальная система. Собственные значения и собственные вектора. Классификация проблем. Характеристическое уравнение. Каноническая форма Фробениуса. Случай диагональной матрицы. Подобные матрицы. Преобразование подобия. Свойства подобных матриц. Ортогональное преобразование подобия. Спектральные задачи. Отношение Релея и его свойства. Матрица вращения. Метод вращений. Сходимости метода. Степенной метод.

Тема 3. Нелинейные системы.
Решение нелинейных уравнений и систем. Метод простой итерации. Построение метода. Теоремы о сходимости. Скалярный случай. Редукция нелинейного уравнения к виду, удобному для итераций. Выбор параметра. Построение метода Ньютона. Теорема о сходимости. Модификации метода. Скалярный случай. Теорема о монотонной сходимости. Квазиньютоновский метод.

Тема 4. Численные методы математического анализа.
Постановка задачи аппроксимации. Обобщѐнный многочлен. Существование и единственности интерполяционного многочлена. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Интерполяционный многочлен Ньютона. Погрешность интерполирования. Оптимальный выбор узлов интерполирования. Интерполирование с кратными узлами. Интерполяционный многочлен Эрмита. Погрешность кратного интерполирования. Линейный сплайн. Параболический сплайн. Кубический сплайн. Оценки погрешности сплайн-интерполирования. Чебышѐвская аппроксимации. Редукция к задаче линейного программирования. Метод наименьших квадратов. Равномерное приближение функций. Постановка задачи численного интегрирования. Алгебраическая степень точность квадратурной формулы. Интерполяционная квадратурная формула. Простейшие и составные квадратурные формулы: формулы прямоугольников, трапеций, парабол. Квадратурная формула Гаусса. Экстремальное свойство многочлена $(x)_n$. Погрешность формулы Гаусса. Постановка задачи численного дифференцирования. Простейшие разностные формулы: формулы левой, правой, центральной, второй разностной производной. Некорректность операции численного дифференцирования.

Тема 5. Численное решение дифференциальных уравнений. Постановка задачи задачи Кощи для обыкновенного дифференциального уравнения. Простейшие методы численного решения задачи Коши. Методы Рунге-Кутта. Оценка глобальной погрешности метода Эйлера. Методы Адамса. Линейная двухточечная задача для системы ОДУ. Метод прогонки. Обоснование метода. Линейная краевая задача для уравнения второго порядка. Разностная аппроксимация. Метод прогонки. Корректность метода. Редукция к вариационной задаче. Метод Ритца. Основные понятия теории разностных схем. Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Аппроксимация и устойчивость. Метод прямых.

4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Введение			
Линейные системы			
Нелинейные системы			
Численные методы математического анализа			
Численное решение дифференциальных уравнений			

4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Введение		
Линейные системы		
Нелинейные системы		
Численные методы математического анализа		
Численное решение дифференциальных уравнений		

4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:
– закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;

– приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
– формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
– развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;
– развитие навыков самоорганизации;
– формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
– выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

Подготовка к лекции. Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к практическому занятию. Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к семинарскому занятию. Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к коллоквиуму. Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое

мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к контрольной работе. Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

Подготовка к зачету. Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуется делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

Подготовка к экзамену. Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) основная литература:

1. Срочко В. А. Численные методы: Курс лекций / В. А. Срочко. – СПб : Изд-во «Лань», 2010. – 208 с.
2. Антоник В. Г. Численные методы: Учебное пособие по практическим занятиям / В. Г. Антоник. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2014. – 132 с.

б) дополнительная литература:

1. Вержбицкий В. М. Основы численных методов / В. М. Вержбицкий. – М. : Высшая школа, 2005. – 760 с.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В.

Лапин, Е. В. Чижонков. – М.: Высшая школа, 2000. – 190 с.

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

1.
2.
3.

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

6.2. Программное обеспечение

ПЕРЕЧИСЛИТЬ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТРЕБУЕМОЕ ДЛЯ ДИСЦИПЛИНЫ

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции

Примеры оценочных средств текущего контроля

1.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad x^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

С помощью метода простой итерации найти приближенное решение системы с точностью $\varepsilon = 2$.

4.

Дана таблица значений функции $f(x)$

x_i	-2	1	4
$f(x_i)$	1	2	-1

Записать интерполяционный многочлен для $f(x)$ в форме Ньютона. Найти линейную функцию $g(x) = a_0 + a_1 x$, аппроксимирующую $f(x)$ по методу наименьших квадратов.

7.

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 10 = 0$$

Для поиска наименьшего положительного корня уравнения найти отрезок локализации и провести одну итерацию метода Ньютона. Оценить погрешность полученного приближения.

10.

Для функции $f(x) = -(x-1)^3$ ищется приближенное значение определенного интеграла

$$I = \int_{-1}^{3} f(x)dx$$

с помощью формулы трапеций.

Требуется:

1) найти наименьшее число узлов узлов интегрирования n, обеспечивающее погрешность численного интегрирования, меньшую, чем 5;

2) используя найденное значение n, вычислить приближенное значение I.

Например:
Демонстрационный вариант контрольной работы №1 (№2, №3)
Демонстрационный вариант теста №1 (№2, №3)
Вопросы для собеседования №1 (№2, №3)
Вопросы для коллоквиума №1 (№2, №3)
Темы рефератов и др.

7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Список вопросов для промежуточной аттестации:

1. Элементы теории матриц. Основные типы матриц. Правила матричного умножения.
2. Элементы теории матриц. Собственные значения и их свойства.
3. Векторные и матричные нормы. Основные матричные нормы. Согласованные и подчинённые нормы.
4. Линейная система. Формы представления и типы систем. Невязка системы. Решение треугольных систем.
5. Метод Гаусса. Схема единственного деления.
6. Метод Гаусса. Компактная схема. Условие существования и единственности LU-разложения.
7. Применение метода Гаусса для вычисления угловых миноров и обратной матрицы.
8. Метод квадратного корня.
9. Число обусловленности матрицы, его происхождение и основные свойства. Хорошо и плохо обусловленные матрицы.
10. Итерационные методы. Сходимость, погрешность, приближённое решение. Скорость сходимости.
11. Метод простой итерации. Условия сходимости. Скорость сходимости. Оценка погрешности. Правило Якоби преобразования системы.
12. Метод Зейделя.
13. Редукция линейной системы к задаче на минимум. Градиент квадратичной функции. Производная по направлению. Направление спуска.

14. Градиентный метод с постоянным шагом. Оценка скорости сходимости. Оптимальный выбор шага. Связь с числом обусловленности.
15. Метод скорейшего спуска. Оценка сходимости. Метод минимальных невязок. Оценка сходимости.
16. Системы с прямоугольными матрицами. Метод наименьших квадратов. Псевдорешения системы. Нормальная система.
17. Проблема собственных значений. Треугольная и диагональная матрицы. Преобразование подобия и его свойства.
18. Симметричная матрица. Отношение Релея и его свойства. Спектральные задачи.
19. Матрица вращения и её свойство.
20. Метод вращений в проблеме собственных значений.
21. Метод простой итерации для нелинейных систем. Теоремы о сходимости.
22. Метод простой итерации для одного уравнения. Геометрическая интерпретация. Редукция уравнения к виду, удобному для итераций.
23. Метод Ньютона для системы уравнений. Теоремы о сходимости. Модификации.
24. Метод Ньютона для одного уравнения. Геометрическая интерпретация. Теорема о монотонной сходимости.
25. Задач интерполирования в классе обобщённых многочленов. Система функций Чебышёва. Интерполирующий базис.
26. Задача алгебраического интерполирования. Многочлены Лагранжа и Ньютона. Погрешность интерполирования.
27. Задача алгебраического интерполирования. Многочлен Лагранжа. Линейная и параболическая интерполяция. Оценка погрешности интерполирования. Задача об оптимальном выборе узлов.
28. Задача кратного интерполирования. Многочлен Эрмита. Погрешность.
29. Сплайн-интерполирование. Линейный сплайн.
30. Сплайн-интерполирование. Кубический сплайн. Оценки погрешности.
31. Задача наилучшего приближения. Чебышёвская аппроксимация.
32. Задача наилучшего приближения. Метод наименьших квадратов.
33. Задача численного интегрирования. Терминология. Квадратурные формулы прямоугольников. Оценки погрешности.
34. Задача численного интегрирования. Терминология. Общая интерполяционная формула. Квадратурные формулы трапеций. Оценки погрешности.
35. Задача численного интегрирования. Терминология. Общая интерполяционная формула. Квадратурные формулы Симпсона. Оценки погрешности.
36. Задача численного дифференцирования. Простейшие формулы. Погрешность аппроксимации.
37. Задача Коши. Численный подход к решению. Простейшие методы численного решения.
38. Задача Коши. Численный подход к решению. Методы Рунге--Кутта. Выбор параметров. Одноэтапный и двухэтапные методы.
39. Задача Коши. Численный подход к решению. Методы Адамса. Погрешность аппроксимации. Одношаговые методы.
40. Линейная краевая задача для системы уравнений. Перенос условий. Метод прогонки.
41. Линейная краевая задача для уравнения второго порядка. Разностная аппроксимация. Погрешность. Порядок точности.
42. Основные понятия теории разностных схем. Аппроксимация, устойчивость, сходимость.
43. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Дискретизация. Явная разностная схема. Шаблон. Аппроксимация и устойчивость.
44. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Дискретизация. Неявная разностная схема. Шаблон. Аппроксимация и устойчивость.

Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:

1.
2.
3.

Разработчик: Срочко В. А., доктор физ.-мат. наук, профессор