



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

Институт математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор ИМИТ ИГУ
М. В. Фалалеев
«25» мая 2022 г.



Рабочая программа дисциплины (модуля)

Б1.О.16 Комплексный анализ

Направление подготовки	01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) подготовки	Математическое моделирование
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная

Иркутск 2022 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели: изучение методов комплексного анализа и их применение к решению прикладных задач

Задачи:

дать определение основных терминов и понятий комплексного анализа;
сформировать представление об аналитических функциях и их свойствах;
выработать умения и навыки дифференцирования и интегрирования функций комплексного переменного, разложения аналитических функций в ряд Тейлора и Лорана;
выработать умения методами комплексного анализа решать задачи вещественного анализа, а также других математических дисциплин.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.16 Комплексный анализ относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: «Математический анализ», «Геометрия», «Алгебра».

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: «Дифференциальные уравнения», «Теоретическая механика», «Функциональный анализ», «Уравнения математической физики».

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

знать: основные понятия, определения теории функций комплексного переменного, свойства аналитических функций;

уметь: выполнять действия с комплексными числами, вычислять значения функций комплексного переменного, вычислять интегралы с помощью вычетов, раскладывать в ряд Лорана аналитические функции, исследовать функцию комплексного переменного на дифференцируемость и аналитичность, вычислять интегралы от функций комплексного переменного;

владеть: математическим аппаратом комплексного анализа и применять его при исследовании математических моделей практических задач.

4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 4 зачетных ед., 144 час.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися			Самост. работа	
		Лекции	Лаб. занятия	Практ. занятия		
Тема 1 Комплексные числа и действия над ними		4		4	4	Тест
Тема 2 Функции комплексного переменного. Основные трансцендентные функции.		4		4	4	Контрольная работа 1
Тема 3 Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитические функции.		4		4	5	Тест
Тема 4 Комплексное интегрирование. Интеграл и интегральная формула Коши		6		6	6	Контрольная работа 2
Тема 5 Ряды. Степенной ряд, ряд Лорана.		4		4	6	Контрольная работа 3
Тема 6 Особые точки. Классификация особых точек функции комплексного переменного.		4		4	4	Тест
Тема 7 Вычеты и их приложение.		6		6	6	Контрольная работа 4
Итого (4 семестр):		32		32	35	экз.

4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самост. работы
	Вид самост. работы	Сроки выполнения	Затраты времени		
Тема 2 Функции комплексного переменного. Основные трансцендентные функции.	Подготовка к контрольной работе	4 неделя	3	Домашняя работа Индивидуальное задание по теме	учебное пособие; сетевой учебно-методический комплекс educa.isu.ru
Тема 4 Комплексное интегрирование. Интеграл и интегральная формула Коши	Подготовка к контрольной работе	9 неделя	4	Домашняя работа Индивидуальное задание по теме	учебное пособие; сетевой учебно-методический комплекс educa.isu.ru

Тема 5 Ряды. Степенной ряд, ряд Лорана.	Подготовка к контрольной работе	11 неделя	4	Домашняя работа Индивидуальное задание по теме	учебное пособие; сетевой учебно-методический комплекс educa.isu.ru
Тема 7 Вычеты и их приложения.	Подготовка к контрольной работе	15 неделя	4	Домашняя работа Индивидуальное задание по теме	учебное пособие; сетевой учебно-методический комплекс educa.isu.ru
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			35		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)			20		

4.3. Содержание учебного материала

Тема1. Комплексные числа и действия над ними

Комплексные числа, комплексная плоскость; модули и аргумент комплексного числа, их свойства; числовые последовательности и их пределы, ряды; геометрическое изображение комплексных чисел; сфера Римана; элементы теории множеств на плоскости; определение пути, кривой, области.

Тема2. Функции комплексного переменного. Основные трансцендентные функции.

Функции комплексного переменного; свойства непрерывных функций. Однолистные функции, их свойства. Основные трансцендентные функции. Обратные функции.

Тема3. Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитические функции.

Комплексное дифференцирование. Формальные производные. Условие Коши-Римана. Определение аналитической функции. Геометрический смысл производной аналитической функции. Конформные отображения.

Тема4. Комплексное интегрирование. Интеграл и интегральная формула Коши.

Комплексное интегрирование. Интеграл вдоль кривой. Свойства интеграла. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.

Тема5. Ряды. Степенной ряд, ряд Лорана.

Ряды комплексных чисел. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Теоремы о равномерно сходящихся рядах. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Круг сходимости и радиус сходимости. Теорема Абеля. Ряд Тейлора. Разложение аналитической функции в степенной ряд в круге и кольце

Тема6. Особые точки. Классификация особых точек функции комплексного переменного.

Изолированные особые точки, их классификация. Связь между нулями и полюсами. Поведение функции в окрестности полюса и существенно особой точки. Теорема Сохоцкого. Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Целые и мероморфные функции.

Тема7. Вычеты и их приложения.

Вычет функции относительно изолированной особой точки Основная теорема о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Тема 1 Комплексные числа и действия над ними	4	Тест	ОПК-1
Тема 2 Функции комплексного переменного. Основные трансцендентные функции.	4	Контрольная работа 1	ОПК-1
Тема 3 Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитические функции.	4	Тест	ОПК-1
Тема 4 Комплексное интегрирование. Интеграл и интегральная формула Коши	6	Контрольная работа 2	ОПК-1
Тема 5 Ряды. Степенной ряд, ряд Лорана.	4	Контрольная работа 3	ОПК-1
Тема 6 Особые точки. Классификация особых точек функции комплексного переменного.	4	Тест	ОПК-1
Тема 7 Вычеты и их приложение.	6	Контрольная работа 4	ОПК-1

4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Тема 1 Сфера Римана; элементы теории множеств на плоскости.	Найти образы точек и кривых комплексной плоскости на сфере Римана. Вывод формул стереографической проекции и хордального расстояния	ОПК-1
Тема 2 Однолистные функции, их свойства.	Нахождение областей однолистности элементарных функций и построение образов кривых и областей.	ОПК-1
Тема 3 Геометрический смысл производной аналитической функции.	Вычисление угла поворота и коэффициента растяжения при конформном отображении.	ОПК-1
Тема 5 Нули аналитической функции	Найти нули аналитической функции и определить их кратность.	ОПК-1
Тема 6 Поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки. Целые и мероморфные функции.	Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки	ОПК-1

4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем

формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

- закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;
- приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
- формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
- развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;
- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

Подготовка к лекции. Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к практическому занятию. Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к семинарскому занятию. Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных

научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к коллоквиуму. Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к контрольной работе. Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

Подготовка к зачету. Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуются делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

Подготовка к экзамену. Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Комплексный анализ

1. [Краснов, Михаил Леонтьевич](#). **Функции комплексного переменного** [Текст] : задачи и примеры с подробными решениями: учеб.пособие для студ. вузов / М. Л.

Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. - 4-е изд., испр. - М. : КомКнига, 2006. - 205 с. : ил. ; 21 см. - (Вся высшая математика в задачах). - ISBN 5-484-00462-4 94экз +

2. Шабунин, Михаил Иванович. Теория функций комплексного переменного [Текст] : учеб.для студ. вузов / М.И. Шабунин, Ю.В. Сидоров. - М. :Юнимедиастиль, Лаборатория Базовых Знаний, 2002. - 247 с. : ил ; 24 см. - (Технический университет. Математика). - Библиогр.: с.247. - ISBN5947740052 : 100.40 р., 126.00 р. 37 экз +

3. Захарова И.В. Теория функций комплексного переменного: учеб.пособие/ И.В. Захарова. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014.-114 с. +

Дополнительная

4. **Пантелеев, А. В.** Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах [Электронный ресурс] / А. В. Пантелеев. - Электрон.текстовые дан. - Москва : Лань", 2015. - ЭБС "Лань". - неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-1921-0 +

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

сетевой учебно-методический информационный комплекс (СУМИК) «Комплексный анализ», размещенный на образовательном портале Иркутского государственного университета <http://educa.isu.ru/>.

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

6.2. Программное обеспечение

ПЕРЕЧИСЛИТЬ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТРЕБУЕМОЕ ДЛЯ ДИСЦИПЛИНЫ

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции
Устный опрос	Все темы	ОПК-1
Тест	1,3,6	ОПК-1
Контрольная работа	2,4,5,7	ОПК-1
Домашняя работа	Все темы	ОПК-1
Индивидуальное задание	1,2, 3,4,5,7	ОПК-1

Примеры оценочных средств текущего контроля

Демонстрационный вариант контрольной работы

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$
2. Представить в алгебраической форме $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right)$
3. Начертить область, заданную неравенствами $z \cdot \bar{z} < 2$, $\operatorname{Re} z \leq 1$, $\operatorname{Im} z > -1$
4. Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$
 $u = x^2 - y^2 - 2y$, $f(0) = 0$
5. Вычислить интеграл $\int_{ABC} \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z} dz$, $AB: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, BC — отрезок, $z_B = 1, z_C = 2$.

Демонстрационный вариант контрольной работы

1. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z = 0$ функцию $f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z^3}$.
2. Разложить в ряд Лорана в окрестности указанных точек и определить область, в которой разложение имеет место
 $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6}$, в окрестности точек $z = 0, z = 3, z = \infty$.
3. Разложить функцию в ряд Лорана в указанном кольце
 $f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 2z - 3}$, $5 < |z-3| < \infty$.

Демонстрационный вариант теста

Действия с комплексными числами

1 🗨 Найдите все значения корня из числа $z = \sqrt[4]{1}$

Баллов:

-/1

Выберите
один ответ.

- ☐ -1
- ☐ ± 1
- ☐ $\pm 1, i$
- ☐ 1

Отправить

1 🗨 Укажите условие Коши-Римана

Баллов:

-/1

Выберите
один ответ.

- ☐ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$
- ☐ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$
- ☐ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$
- ☐ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Отправить

- 1 Выберите правильную последовательность действий для нахождения
 Баллов: аналитической функции $f(z) = u + iv$, если заданы её действительная часть (или
 -1/1 мнимая) и значение $f(z)$ в некоторой точке z_0

Находим частные производные заданной функции $u(x, y), v(x, y)$	Выбрать...
Используя условия Коши-Римана находим $v(x, y)$ (или $u(x, y)$) с точностью до произвольной постоянной c	Выбрать...
Записываем искомую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) + c$ и преобразуем полученное выражение к функции переменной z	Выбрать...
Находим значение постоянной c	Выбрать...
Отправить	

- 1 Выберите
 Баллов: Вычислите интеграл $\int_L z dz$, L - полуокружность $|z| = 1, \text{Im } z \geq 0$
 -1/1

Выберите один ответ.

☐ $- \pi i$
☐ $- \pi$
☐ πi
☐ π

7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Список вопросов для промежуточной аттестации:

1. Комплексные числа: определение, интерпретация, модуль, аргумент, показательная и тригонометрическая запись к. ч.
2. Комплексные числа: действия над ними.
3. Последовательности и ряды к. ч.
4. Расширенная комплексная плоскость, формулы стереографической проекции
5. Условия Коши- Римана, аналитичность функции.
6. Геометрический смысл производной ф. к. п.
7. Интегрирование ф. к. п., вывод формул (5,6)
8. Интегральная теорема Коши (случай 1), «треугольника», остальное схематично.
9. Теорема о составном контуре.
10. Интегральная формула Коши.
11. Теорема Лорана
10. Полюс (теорема)
11. Основная теорема о вычетах
12. Теорема о сумме вычетов
13. Теорема о логарифмическом вычете
14. Лемма Жордана.
12. Понятие функции к. п., примеры, Основные трансцендентные функции.
13. Предел функции, непрерывность ф. к. п.
14. Кривые и области на к. п.
15. Производная и дифференциал.
16. Гармонические функции.
17. Определение интеграла, свойства интеграла, оценки интегралов.
18. Ряд Лорана.

19. Изолированные особые точки. Классификация изолированных особых точек однозначного характера.
20. Случай бесконечно удаленной точки
21. Целые и мероморфные функции
22. Вычисление вычета, вычет в бесконечно удаленной точке
23. Понятие конформного отображения. (Примеры функций)

Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:

Экзаменационный билет

1. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного (доказать теорему). Условия Коши-Римана. Аналитичность комплексной функции в точке и области.

2. Вычислить $\operatorname{Ln}(1+i)$

3. Исследовать аналитические свойства функции

и найти ее производную $f(z) = z|z|$

4. Разложить в ряд Лорана по степеням z

$$\frac{2z-3}{z^2-5z+6}$$

5. Вычислить интеграл с помощью вычетов

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx$$

Разработчик: Захарова И. В., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений