



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

Институт математики и информационных технологий  
Кафедра информационных технологий



**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**Б1.О.15 Дифференциальные уравнения**

Направление подготовки	01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) подготовки	Системы искусственного интеллекта
Квалификация выпускника	бакалавр
Форма обучения	очная

Иркутск 2024 г.

## **1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ**

Цели:

1. Формирование у студентов современных теоретических знаний и практических навыков исследования в области обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Ознакомление с принципами математического моделирования с использованием аппарата теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи:

1. Изучить основные определения и теоремы предметной области.
2. Выработать навыки классификации обыкновенных дифференциальных уравнений в соответствии с известными типами.
3. Изучить основные свойства типов обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих важное теоретическое и практическое значение.
4. Изучить методы интегрирования дифференциальных уравнений.
5. Овладеть навыками моделирования процессов дифференциальными уравнениями.
6. Сформировать понимание современного состояния науки в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

## **2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО**

Учебная дисциплина Б1.О.15 Дифференциальные уравнения относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: Б1.О.12 Математический анализ, Б1.О.13 Алгебра, Б1.О.14 Геометрия, Б1.О.27 Пакеты компьютерной математики.

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: Б1.О.17 Численные методы, Б1.О.18 Методы оптимизации, Б1.О.20 Методы оптимального управления, Б1.О.22 Функциональный анализ, Б1.О.23 Уравнения математической физики.

## **3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика:

ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности;

ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

знать: аппарат теории обыкновенных дифференциальных уравнений; основные определения и теоремы предметной области;

уметь: совершенствовать и применять аппарат теории обыкновенных дифференциальных уравнений; корректно выбирать метод решения;

владеть: основными методами аппарата теории обыкновенных дифференциальных уравнений; навыками моделирования.

#### 4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 8 зачетных ед., 288 час.

Форма промежуточной аттестации: экзамен, экзамен.

##### 4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися			Самост. работа	
		Лекции и	Лаб. занятия	Практ. занятия		
Тема 1. Введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений	3	2				Экз.
Тема 2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной	3	2		6	2	Контрольная работа, экз.
Тема 3. Уравнение в полных дифференциалах	3	2		4	2	Контрольная работа, экз.
Тема 4. Интегрирующий множитель	3	2				Экз.
Тема 5. Линейные однородные ДУ 1-го порядка	3	2		2		Контрольная работа, экз.
Тема 6. Линейные неоднородные ДУ 1-го порядка	3	2		4	3	Контрольная работа, экз.
Тема 7. Частные случаи линейных ДУ 1-го порядка	3	2		2	1	Контрольная работа, экз.
Тема 8. Уравнение Бернулли. Простые типы уравнений, интегрируемые в квадратурах.	3	2		6	6	Контрольная работа, экз.
Тема 9. Уравнение Риккати	3	2				Экз.
Тема 9. Уравнение Риккати	4			2	2	Контрольная работа, экз.
Тема 10. ДУ 1-го порядка, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра.	3	2				Экз.

Тема 10. ДУ 1-го порядка, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра.	4			2	2	Контрольная работа, экз.
Тема 11. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро. Особые решения.	3	2				Экз.
Тема 11. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро. Особые решения.	4			4	2	Контрольная работа, экз.
Тема 12. ДУ высших порядков	3	2				Экз.
Тема 13. Методы понижения порядка	3	2				Экз.
Тема 13. Методы понижения порядка	4			6	4	Контрольная работа, экз.
Тема 14. Понижение порядка отдельных видов неполных уравнений	3	2				Экз.
Тема 15. Линейные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общий метод решения.	3	2				Контрольная работа, экз.
Тема 16. Линейные однородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение.	3	2		4	4	Контрольная работа, экз.
Тема 17. Линейные неоднородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение. Метод неопределенных коэффициентов.	3	2		6	4	Контрольная работа, экз.
Тема 17. Линейные неоднородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение. Метод неопределенных коэффициентов.	4			2	2	Контрольная работа, экз.
Тема 18. Приближенные методы решения ДУ	4	2			2	Контрольная работа, экз.
Тема 19. Метод Эйлера и его модификации	4	2				Экз.
Тема 20. Введение в теорию систем обыкновенных ДУ	4	2				Экз.
Тема 21. Теорема существования и единственности решения задачи Коши	4	2				Экз.
Тема 22. Продолжение решения. Корректность задачи Коши.	4	2				Экз.
Тема 23. Линейные системы ДУ с постоянными коэффициентами	4	2				Контрольная работа, экз.

Тема 24. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Случай 1: базис из собственных векторов.	4	2		2	2	Контрольная работа, экз.
Тема 25. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Случай 2: базис Жордана.	4	2		4	2	Контрольная работа, экз.
Тема 26. Линейные неоднородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.	4	2		2	2	Контрольная работа, экз.
Тема 27. Матричная экспонента. Формула общего решения линейной системы ДУ с постоянными коэффициентами.	4	2		2		Контрольная работа, экз.
Тема 28. Алгебраический метод построения матричной экспоненты.	4	2				Контрольная работа, экз.
Тема 29. Линейная независимость функций. Линейные ДУ высших порядков с переменными коэффициентами	4	2				Экз.
Тема 30. Общее решение линейного однородного ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами	4	2				Экз.
Тема 31. Общее решение линейного неоднородного ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами. Метод Лагранжа.	4	2		2	4	Контрольная работа, экз.
Тема 32. Краевая Задача.	4	2		2	2	Контрольная работа, экз.
Тема 33. Функция Грина	4	2		2		Контрольная работа, экз.
Итого (3 семестр):		34		34	22	экз.
Итого (4 семестр):		32		32	26	экз.

#### 4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы
	Вид самостоятельной работы	Сроки выполнения	Затраты времени		

Тема 2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа	1. Краснов, Михаил Леонтьевич. Обыкновенные дифференциальные уравнения задачи и примеры с подробными решениями : учеб. пособие для студ. вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. - 5-е изд., испр. - М. : КомКнига, 2005. - 253 с. - ISBN 5-484-00193-5. 50 экз. + 2. Филиппов, Алексей Федорович. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] : учеб. пособие / А. Ф. Филиппов. - 4-е изд. - М. : Либроком, 2011. - 237 с. - ISBN 978-5-397-02914-8. 29 экз. +
Тема 3. Уравнение в полных дифференциалах	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа	
Тема 6. Линейные неоднородные ДУ 1-го порядка	Самостоятельное решение задач	1 неделя	3	Контрольная работа	
Тема 7. Частные случаи линейных ДУ 1-го порядка	Самостоятельное решение задач	1 неделя	1	Контрольная работа	
Тема 8. Уравнение Бернулли. Простые типы уравнений, интегрируемые в квадратурах.	Самостоятельное решение задач	3 недели	6	Контрольная работа	
Тема 9. Уравнение Риккати	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа	
Тема 10. ДУ 1-го порядка, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра.	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа	
Тема 11. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро. Особые решения.	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа	

Тема 13. Методы понижения порядка	Самостоятельное решение задач	2 недели	4	Контрольная работа
Тема 16. Линейные однородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение.	Самостоятельное решение задач	2 недели	4	Контрольная работа
Тема 17. Линейные неоднородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение. Метод неопределенных коэффициентов.	Самостоятельное решение задач	2 недели	4	Контрольная работа
Тема 17. Линейные неоднородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение. Метод неопределенных коэффициентов.	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа
Тема 18. Приближенные методы решения ДУ	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа
Тема 24. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Случай 1: базис из собственных векторов.	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа
Тема 25. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Случай 2: базис Жордана.	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа
Тема 26. Линейные неоднородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа

Тема 31. Общее решение линейного неоднородного ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами. Метод Лагранжа.	Самостоятельное решение задач	2 недели	4	Контрольная работа	
Тема 32. Краевая Задача.	Самостоятельное решение задач	1 неделя	2	Контрольная работа	
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			48		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)			24		

#### 4.3. Содержание учебного материала

Введение	
Тема 1. Введение в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений	Понятие дифференциального уравнения, порядка ДУ и его решения. Примеры дифференциальных уравнений. Примеры использования дифференциальных уравнений в приложениях.
Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной	
Тема 2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной	Понятие ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной, и его решения. Интегральная кривая. Разрешимость в квадратурах. Нормальная форма ДУ и дифференциальная форма ДУ. Геометрическая интерпретация ДУ. Поле направлений. Изоклина. Метод изоклин. Задача Коши (аналитическая формулировка и геометрическая формулировка). Теорема существования и единственности (без доказательства). Алгоритм продолжения решения.
Тема 3. Уравнение в полных дифференциалах	Определение уравнения в полных дифференциалах. Критерий уравнения в полных дифференциалах. Формула, дающая семейство решений уравнения в полных дифференциалах. Частный случай уравнения в полных дифференциалах: уравнение с разделенными переменными.
Тема 4. Интегрирующий множитель	Интегрирующий множитель. Поиск интегрирующего множителя (вывод уравнения в частных производных для поиска интегрирующего множителя). Способ применения этого уравнения в частных производных, когда интегрирующий множитель зависит только от одной переменной. Уравнение с разделяющимися переменными и его интегрирующий множитель.

Тема 5. Линейные однородные ДУ 1-го порядка	Понятие линейного однородного ДУ 1-го порядка. Общее решение и частное решение. Фундаментальное решение. Теорема о фундаментальном решении. Теорема о структуре общего решения ЛОДУ-1. Интегрирование ЛОДУ-1, как уравнения с разделяющимися переменными. Модель Мальтуса.
Тема 6. Линейные неоднородные ДУ 1-го порядка	Понятие линейного неоднородного ДУ 1-го порядка. и соответствующее ему ЛОДУ-1. Общее решение и частное решение. Теорема о структуре общего решения ЛНДУ-1. Методы решения ЛНДУ-1: метод Лагранжа, метод Бернулли, метод Эйлера, формула общего решения. Пример: сила тока в RL-цепи с графиком зависимости силы тока от времени.
Тема 7. Частные случаи линейных ДУ 1-го порядка	Дифференциальные уравнения 1-го порядка, линейные относительно независимой переменной. Линейные уравнения 1-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью: метод неопределенных коэффициентов.
Тема 8. Уравнение Бернулли. Простые типы уравнений, интегрируемые в квадратурах.	Уравнение Бернулли. Сведение к линейному уравнению. Однородное уравнение (не линейное). Сведение к уравнению с разделяющимися переменными. Уравнение, приводимое к однородному. Сведение к однородному уравнению. Обобщенное однородное уравнение 1-го порядка.
Тема 9. Уравнение Риккати	Понятие уравнения Риккати. Проверка условий теоремы существования и единственности. Специальное уравнение Риккати. Канонический вид уравнения Риккати. Решение уравнения Риккати при известном частном решении (сведение к уравнению Бернулли). Подбор частного решения в виде $y = ax + b$ и $y = a/x$ .
Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной	
Тема 10. ДУ 1-го порядка, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра.	ДУ-1, не разрешенное относительно производной. Решение. Решение в параметрической форме. Интегральная кривая. Задача Коши. Теорема существования и единственности.
Тема 11. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро. Особые решения.	Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро. Особое решение. Дискриминантная кривая. Алгоритм построения особого решения.
Дифференциальные уравнения высших порядков	
Тема 12. ДУ высших порядков	Понятие ДУ n-го порядка (разрешенного и неразрешенного относительно старшей производной), и его решения. Интегральная кривая. Задача Коши. Теорема существования и единственности. Геометрическая интерпретация начальных условий. Пример: переходная кривая ж/д пути
Тема 13. Методы понижения порядка	Преобразования ДУ. Инвариант преобразования. Понижение порядка с помощью инвариантов. Уравнение не содержит явно $y$ и, возможно, первые $(k - 1)$ производные $y$ . Уравнение не содержит явно $x$ . Однородное по $y$ и ее производным. Случай полной производной. Однородное в обобщенном смысле.

Тема 14. Понижение порядка отдельных видов неполных уравнений	Неполные уравнения $F(x, y^{(n)}) = 0$ , $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ , $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ .
Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	
Тема 15. Линейные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общий метод решения.	Дифференциальный многочлен. Сложение, умножение. Формула сдвига. Характеристический многочлен. Линейное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и его общее решение. Общий метод решения ЛДУ-n с ПК с помощью дифференциальных многочленов. Существование и единственность решения задачи Коши для ЛДУ-n с ПК.
Тема 16. Линейные однородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение.	Определение. Линейность пространства решений. Характеристическое уравнение. Общее решение. Теорема об общем решении. Свойства общего решения. Выделение вещественных решений из комплексных. Некоторые линейные ДУ, приводимые к уравнениям с постоянными коэффициентами.
Тема 17. Линейные неоднородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение. Метод неопределенных коэффициентов.	Определение. Соответствующее однородное. Принцип суперпозиции. Метод неопределенных коэффициентов. Резонансный и нерезонансный случаи. Пример. Уравнение малых колебаний маятника.
Приближенные методы решения дифференциальных уравнений	
Тема 18. Приближенные методы решения ДУ	Эквивалентность задачи Коши и интегрального уравнения. Метод последовательных приближений. Метод рядов.
Тема 19. Метод Эйлера и его модификации	Метод Эйлера, метод Эйлера с пересчетом и модифицированный метод Эйлера. Метод Рунге-Кутты 4 порядка. Реализация алгоритмов приближенного решения на Python и в Excel.
Системы дифференциальных уравнений	
Тема 20. Введение в теорию систем обыкновенных ДУ	Определение системы ДУ в нормальной форме. Решение. Векторная запись системы. Задача Коши. Условие Липшица по «у». Система интегральных уравнений, эквивалентная задаче Коши. Лемма об эквивалентности. Лемма Гронуолла + доказательство. Усиленная лемма Гронуолла (без доказательства).
Тема 21. Теорема существования и единственности решения задачи Коши	Теорема существования и единственности для систем. Схема доказательства существования. Доказательство единственности.
Тема 22. Продолжение решения. Корректность задачи Коши.	Продолжение решения (алгоритм). Теорема о продолжении решения (без доказательства). Корректность задачи Коши. Непрерывная зависимость решения от параметров в правой части.
Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	
Тема 23. Линейные системы ДУ с постоянными коэффициентами	Определение. Векторная запись системы ДУ. Однородная и неоднородная линейная система. Решение. Задача Коши.

Тема 24. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Случай 1: базис из собственных векторов.	Собственные значения, собственные векторы. Базис из собственных векторов. Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай базиса из собственных векторов).
Тема 25. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Случай 2: базис Жордана.	Присоединенные векторы, жорданова цепочка. Жорданов базис. Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (базис Жордана).
Тема 26. Линейные неоднородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.	Определение. Принцип суперпозиции. Общее решение (теорема).
Тема 27. Матричная экспонента. Формула общего решения линейной системы ДУ с постоянными коэффициентами.	Матричная экспонента и ее свойства. Приложение матричной экспоненты к решению ЛНСДУ с ПК.
Тема 28. Алгебраический метод построения матричной экспоненты.	Алгебраический метод построения матричной экспоненты. Случай 1: матрица имеет диагональный вид. Случай 2: матрица не диагональная, но ее собственные векторы образуют базис. Случай 3: матрица не диагональная и базиса из собственных векторов не существует.
Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами	
Тема 29. Линейная независимость функций. Линейные ДУ высших порядков с переменными коэффициентами	Линейная зависимость функций. Определитель Вронского. Необходимое условие линейной зависимости. Линейное уравнение. Линейный дифференциальный оператор. Теорема существования и единственности для линейного ДУ (глобальная)
Тема 30. Общее решение линейного однородного ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами	Определение. Свойства решений ЛОДУ- $n$ . Критерий линейной независимости $n$ решений ЛОДУ- $n$ . Фундаментальная система решений (ФСР). Общее решение ЛОДУ- $n$ . Построение ЛОДУ- $n$ по заданной ФСР. Формула Лиувилля-Остроградского.
Тема 31. Общее решение линейного неоднородного ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами. Метод Лагранжа.	Определение. Общее решение. Метод Лагранжа.
Тема 32. Краевая Задача.	Понятие краевой задачи на примере линейного ДУ 2-го порядка. Краевые условия. Однородная и неоднородная краевая задача. Сравнение начальной и краевой задачи. Единственность решения неоднородной краевой задачи при любой правой части.

Тема 33. Функция Грина	Функция Грина. Вывод формулы для построения функции Грина.
------------------------	--

#### 4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Тема 2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной	6	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 3. Уравнение в полных дифференциалах	4	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 5. Линейные однородные ДУ 1-го порядка	2	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 6. Линейные неоднородные ДУ 1-го порядка	4	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 7. Частные случаи линейных ДУ 1-го порядка	2	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 8. Уравнение Бернулли. Простые типы уравнений, интегрируемые в квадратурах.	6	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 9. Уравнение Риккати	2	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 10. ДУ 1-го порядка, не разрешенные относительно производной. Метод введения параметра.	2	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 11. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро. Особые решения.	4	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 13. Методы понижения порядка	6	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 16. Линейные однородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение.	4	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 17. Линейные неоднородные ДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. Общее решение. Метод неопределенных коэффициентов.	8	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 24. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Случай 1: базис из собственных векторов.	2	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 25. Линейные однородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Случай 2: базис Жордана.	4	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3

Тема 26. Линейные неоднородные системы ДУ с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.	2	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 27. Матричная экспонента. Формула общего решения линейной системы ДУ с постоянными коэффициентами.	2	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 31. Общее решение линейного неоднородного ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами. Метод Лагранжа.	2	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 32. Краевая Задача.	2	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3
Тема 33. Функция Грина	2	Контрольная работа	ОПК-1, ОПК-3

#### 4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Тема 4. Интегрирующий множитель	Разобрать случай подбора интегрирующего множителя для дифференциального уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ в виде функции $\mu(\omega)$ , где $\omega = \omega(x, y)$ — функция двух переменных.	ОПК-1, ОПК-3
Тема 9. Уравнение Риккати	Разобрать алгоритм сведения уравнения Риккати к каноническому виду в общем случае.	ОПК-1, ОПК-3
Тема 18. Приближенные методы решения ДУ	Методом рядов построить общее решение для уравнения Эйри.	ОПК-1, ОПК-3

#### 4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

- закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;
- приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
- формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
- развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;
- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

**Подготовка к лекции.** Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к практическому занятию.** Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к семинарскому занятию.** Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к коллоквиуму.** Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при

изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

**Подготовка к контрольной работе.** Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

**Подготовка к зачету.** Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуются делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

**Подготовка к экзамену.** Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

## **5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **а) основная литература**

1. Филиппов, Алексей Федорович. Введение в теорию дифференциальных уравнений [Текст] : учеб. для студ. вузов по группе физ.-мат. напр. и спец. / А. Ф. Филиппов. - Изд. стер. - М. : Ленанд, 2015. - 239 с. - ISBN 978-5-9710-1499-7. 50 экз.+

### **б) дополнительная литература**

1. Краснов, Михаил Леонтьевич. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : задачи и примеры с подробными решениями: Учеб. пособие для студ. вузов / М.

Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. - 5-е изд., испр. - М. :КомКнига, 2005. - 253 с. - ISBN 5-484-00193-5. 40 экз. +

2. Треногин, Владилен Александрович. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / В. А. Треногин. - М. :Физматлит, 2009. - 311 с. - ISBN 978-5-9221-1063-1. 50 экз. +

3. Филиппов, Алексей Федорович. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст] : учеб.пособие / А. Ф. Филиппов. - 4-е изд. - М. : Либроком, 2011. - 237 с. - ISBN 978-5-397-02914-8. 29 экз. +

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

1. <https://isu.bibliotech.ru> — электронно-библиотечная система ИГУ
2. <http://e.lanbook.com> — электронно-библиотечная система ЛАНЬ
3. <http://rucont.ru> — электронная библиотека РУКОНТ
4. <http://ibooks.ru> — электронно-библиотечная система ibooks
5. <http://e-library.ru> — научная электронная библиотека eLIBRARY
6. <http://educa.isu.ru> — образовательный портал ИГУ

## 6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

### 6.2. Программное обеспечение

1. Python (версии 3.6 или выше) + Numpy + Matplotlib + Scipy + Sympy.
2. MS Excel (версии 2007 или выше) или LibreOffice.

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции
Контрольная работа №1	Темы № 2, 3, 5- 8	ОПК-1, ОПК-3
Контрольная работа №2	Темы № 15-17	ОПК-1, ОПК-3
Контрольная работа №3	Темы № 9-11, 13, 17, 18	ОПК-1, ОПК-3
Контрольная работа №4	Темы № 23-28, 31-33	ОПК-1, ОПК-3

### Примеры оценочных средств текущего контроля

Демонстрационный вариант контрольной работы №1

Определить тип уравнения. Найти все решения.

1.  $y' = \frac{x + y - 4}{x - 2}$ .

2.  $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$ .

3.  $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$ .

4. Решить задачу Коши

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

5. Методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку  $M$

$$xy' = 2y, \quad M(2, 3).$$

Демонстрационный вариант контрольной работы №2

Записать частное решение неоднородных уравнений согласно методу неопределенных коэффициентов, числовых значений коэффициентов не находить. Также записать общее решение соответствующих однородных уравнений

1.  $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$ .

2.  $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$ .

3.  $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$ .

Решить уравнение

4.  $y'' - 2y' = 2\operatorname{ch} 2x$ .

5.  $y''' - y' = 2e^x + \cos x$ .

Демонстрационный вариант контрольной работы №3

Решить ДУ или задачу Коши

1.  $\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''$ .

2.  $y'' = 18\sin^3 y \cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 3$ .

3.  $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$ .

4.  $y''' + y'' = 49 - 24x^2$ .

5.  $4y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}$ .

## Демонстрационный вариант контрольной работы №4

Решить задачу Коши

1.  $y'' + y = 1/\sin x$ ,  $y(\pi/2) = 1$ ,  $y'(\pi/2) = \pi/2$ .

2.  $y'' - 3y' + 2y = e^x/(1 + e^{-x})$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

3. Решить нелинейную систему

$$\begin{cases} y' = y^2 z \\ z' = \frac{z}{x} - yz^2 \end{cases}$$

4. Найти общее решение системы ДУ

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$$

## 7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

### Список вопросов для промежуточной аттестации:

Экзаменационные вопросы (3 семестр)

1. Понятие ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной, и его решения. Интегральная кривая. Разрешимость в квадратурах. Нормальная форма ДУ и дифференциальная форма ДУ. Задача Коши (аналитическая формулировка и геометрическая формулировка). Теорема существования и единственности (без доказательства). Алгоритм продолжения решения.
2. Геометрическая интерпретация ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Поле направлений. Изоклина. Метод изоклин.
3. Определение уравнения в полных дифференциалах. Критерий уравнения в полных дифференциалах.
4. Интегрирование уравнения в полных дифференциалах. Уравнение с разделенными переменными, как частный случай уравнения в полных дифференциалах.
5. Интегрирующий множитель. Поиск интегрирующего множителя (вывод уравнения в частных производных для поиска интегрирующего множителя).
6. Поиск интегрирующего множителя, зависящего только от одной переменной. Уравнение с разделяющимися переменными и его интегрирующий множитель.
7. Понятие линейного однородного ДУ 1-го порядка. Общее решение и частное решение. Фундаментальное решение (определение и формула вычисления). Теорема о структуре общего решения ЛОДУ-1.
8. Интегрирование ЛОДУ-1, как уравнения с разделяющимися переменными. Модель Мальтуса.
9. Понятие линейного неоднородного ДУ 1-го порядка. и соответствующее ему ЛОДУ-1. Общее решение и частное решение. Теорема о структуре общего решения ЛНДУ-1.
10. Методы решения ЛНДУ-1: метод Лагранжа, метод Бернулли, метод Эйлера.
11. Вывод формулы для построения общего решения ЛНДУ-1. Пример: сила тока в RL-цепи с графиком зависимости силы тока от времени.
12. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, линейные относительно независимой переменной.
13. Линейные уравнения 1-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью: метод неопределенных коэффициентов.
14. Уравнение Бернулли. Сведение к линейному уравнению.

15. Понятие уравнения Риккати. Проверка условий теоремы существования и единственности. Специальное уравнения Риккати. Канонический вид уравнения Риккати. Решение уравнения Риккати при известном частном решении (сведение к уравнению Бернулли). Отдельные рекомендации по подбору частного решения.
16. Однородное уравнение (не линейное). Сведение к уравнению с разделяющимися переменными. Обобщенное однородное уравнение 1-го порядка.
17. Уравнение, приводимое к однородному. Сведение к однородному уравнению.
18. ДУ-1, не разрешенное относительно производной. Определение решения. Метод интегрирования в параметрической форме. Интегральная кривая.
19. ДУ-1, не разрешенное относительно производной. Задача Коши. Теорема существования и единственности.
20. Уравнение Лагранжа и метод его решения. Уравнение Клеро и метод его решения.
21. Особое решение. Дискриминантная кривая. Алгоритм построения особого решения.
22. Понятие ДУ n-го порядка (разрешенного и неразрешенного относительно старшей производной), и его решения. Интегральная кривая.
23. Понятие ДУ n-го порядка. Задача Коши. Геометрическая интерпретация начальных условий. Теорема существования и единственности.
24. Понижение порядка ДУ с помощью инвариантов: уравнение не содержит явно «у» и, возможно, первые (k-1) производные; уравнение не содержит явно «х»; однородное по «у» и ее производным.
25. Понижение порядка ДУ. Метод выделения полной производной. Метод решения однородного в обобщенном смысле ДУ высшего порядка.
26. Интегрирование неполных уравнений вида  $F(x, y^{(n)}) = 0$ ,  $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ ,  $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ .
27. Дифференциальный многочлен. Сложение, умножение. Формула сдвига. Характеристический многочлен. Линейное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и его общее решение.
28. Общий метод решения ЛДУ-n с постоянными коэффициентами с помощью дифференциальных многочленов. Существование и единственность решения задачи Коши для ЛДУ-n с постоянными коэффициентами.
29. Линейное однородное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Определение. Линейность пространства решений. Характеристическое уравнение.
30. Линейное однородное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение. Теорема об общем решении. Свойства общего решения.
31. Линейное однородное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Выделение вещественных решений из комплексных. Некоторые линейные ДУ, приводимые к уравнениям с постоянными коэффициентами.
32. Линейное неоднородное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Определение. Соответствующее однородное. Принцип суперпозиции.
33. Линейное неоднородное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов. Резонансный и нерезонансный случаи. Пример: уравнение малых колебаний математического маятника.

#### Экзаменационные вопросы (4 семестр)

1. Эквивалентность задачи Коши и интегрального уравнения для дифференциального уравнения 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Метод последовательных приближений.
2. Метод рядов.
3. Метод Эйлера для решения ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Метод Эйлера с пересчетом и модифицированный метод Эйлера.
4. Метод Рунге-Кутты 4 порядка. Реализация алгоритмов приближенного решения на Python и с помощью электронных таблиц (MS Excel или LibreOffice).

5. Определение системы ДУ в нормальной форме. Определение решения. Векторная запись системы. Задача Коши. Условие Липшица по «у». Система интегральных уравнений, эквивалентная задаче Коши. Лемма об эквивалентности.
6. Лемма Гронуолла + доказательство. Усиленная лемма Гронуолла (без доказательства).
7. Теорема существования и единственности для систем. Схема доказательства существования.
8. Теорема существования и единственности для систем. Доказательство единственности.
9. Продолжение решения (алгоритм). Теорема о продолжении решения (без доказательства).
10. Корректность задачи Коши для систем ДУ. Непрерывная зависимость решения от параметров в правой части.
11. Линейная система ДУ с постоянными коэффициентами. Определение. Векторная запись системы ДУ. Однородная и неоднородная линейная система. Решение. Задача Коши.
12. Собственные значения, собственные векторы. Базис из собственных векторов. Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (случай базиса из собственных векторов).
13. Присоединенные векторы, жорданова цепочка. Жорданов базис. Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (базис Жордана).
14. Линейная неоднородная система ДУ с постоянными коэффициентами. Определение. Принцип суперпозиции. Общее решение (теорема).
15. Матричная экспонента и ее свойства. Приложение матричной экспоненты к решению ЛНСДУ с ПК.
16. Алгебраический метод построения матричной экспоненты. Случай 1: матрица имеет диагональный вид. Случай 2: матрица не диагональная, но ее собственные векторы образуют базис.
17. Алгебраический метод построения матричной экспоненты. Случай 3: матрица не диагональная, и базиса из собственных векторов не существует.
18. Линейная зависимость/независимость функций. Определитель Вронского. Необходимое условие линейной зависимости  $n$  функций.
19. Линейное дифференциальное уравнение высшего порядка с переменными коэффициентами. Линейный дифференциальный оператор. Теорема существования и единственности для линейного ДУ (глобальная)
20. Линейное однородное ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами. Определение. Свойства решений ЛОДУ- $n$ . Критерий линейной независимости  $n$  решений ЛОДУ- $n$ .
21. Линейное однородное ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений (ФСР). Общее решение ЛОДУ- $n$ .
22. Линейное однородное ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами. Построение ЛОДУ- $n$  по заданной ФСР. Формула Лиувилля-Остроградского.
23. Линейное неоднородное ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами. Определение. Общее решение. Метод Лагранжа.
24. Понятие краевой задачи на примере линейного ДУ 2-го порядка. Краевые условия. Однородная и неоднородная краевая задача. Сравнение начальной и краевой задачи. Единственность решения неоднородной краевой задачи при любой правой части.
25. Функция Грина. Вывод формулы для построения функции Грина.

**Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:**

Демонстрационный экзаменационный билет (3 семестр)



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Иркутский государственный университет»**  
**(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

**Институт математики и информационных технологий**

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 23**

1. Решить уравнение:  $\frac{dx}{y} - \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0$ .

2. Решить уравнение:  $y' = \frac{2x + 3y - 5}{5x - 5}$ .

3. Линейное неоднородное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Определение. Соответствующее однородное. Принцип суперпозиции.

Демонстрационный экзаменационный билет (4 семестр)



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Иркутский государственный университет»**  
**(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

**Институт математики и информационных технологий**

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 26**

1.  $y''y^3 + 25 = 0$ ,  $y(2) = -5$ ,  $y'(2) = -1$ .

2.  $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$ .

3. Линейное однородное ДУ высшего порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений (ФСР). Общее решение ЛОДУ-n.

Разработчик: Леонтьев Роман Юрьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент.