



## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФГБОУ ВО «ИГУ»

Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета

/Н.М. Буднев

«20» апреля 2024 г.



### Рабочая программа дисциплины

Наименование дисциплины: Б1.О.13.05 Теория функций комплексного переменного

Направление подготовки: 03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки: Фундаментальная физика

Квалификация (степень) выпускника: Бакалавр

Форма обучения: Очная

Согласовано с УМК физического факультета

Протокол №42 от «15» апреля 2024 г.

Председатель

Н.М.Буднев

Рекомендовано кафедрой:

Протокол №7

От «15» марта 2024 г.

И.о. зав. кафедрой

С.В. Ловцов

Иркутск 2024 г.

## Содержание

I. Цели и задачи дисциплины.....	3
II. Место дисциплины в структуре ОПОП:.....	3
III. Требования к результатам освоения дисциплины.....	3
IV. Содержание и структура дисциплины.....	4
4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов.....	4
4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.....	4
4.3. Содержание учебного материала.....	5
4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ.....	6
4.3.2. План самостоятельной работы студентов.....	7
4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов.....	8
4.5. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ.....	8
V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....	8
а) список литературы.....	8
б) периодические издания.....	8
в) список авторских методических разработок.....	8
в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы.....	9
VI. Материально-техническое обеспечение дисциплины.....	9
VII. Образовательные технологии:.....	9
VIII. Оценочные материалы для текущего контроля и промежуточной аттестации.....	9
Приложение: фонд оценочных средств	

## **I. Цели и задачи дисциплины**

Теория функций комплексной переменной является одним из заключительных разделов общего курса высшей математики, изучаемой студентами физиками. Фундаментальные понятия теории функций комплексной переменной находят широкое применение в большинстве разделов современной математики и физики.

Теория функций комплексной переменной связана с изучением аналитических функций. В данном курсе важнейшие понятия математического анализа функций действительной переменной, такие как предел, непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость, ряд и его сходимости формулируются для функций комплексной переменной и изучаются их свойства. При этом возникают новые интересные аспекты, связанные с конформными отображениями и методами вычисления определенных интегралов от функций действительной переменной на основе понятий теории функций действительной переменной.

### **Цели курса**

Курс теории функций комплексной переменной направлен на развитие методов исследования функций в комплексной области и применение этих методов к задачам математического анализа. Формулируются базовые понятия математического анализа, такие как предел, непрерывность, производная, интеграл и ряд для комплексных функций, зависящих от комплексной переменной. Материалы данного курса используются при изучении курсов методов математической физики, классическая механика, электродинамика, квантовая механика, а также спецкурсов по теоретической физике. Знание методов теории функций комплексной переменной является необходимым элементом математического образования современного ученого-физика.

Поэтому цель курса – овладение основными понятиями теории функций комплексного переменного, формирование представлений о её методах и взаимосвязях с действительным анализом, а также с другими математическими дисциплинами

### **Задачи курса**

- сформировать представления об аналитических функциях, конформном отображении, комплексном интеграле, аналитическом продолжении, римановой поверхности и особых точках функции, рядах аналитических функций, вычетах;
- выработать умения и навыки дифференцирования функций комплексного переменного, построения конформных отображений простейших областей, вычисления комплексных интегралов, разложения функций в ряд Тейлора и ряд Лорана, а также вычисления вычетов функций;
- научить применять методы комплексного анализа для вычисления определённых и несобственных интегралов и решения других задач алгебры и анализа;
- познакомить с современными направлениями развития комплексного анализа.

## **II. Место дисциплины в структуре ОПОП:**

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» является обязательной для изучения по данному профилю. Изучение разделов курса предполагает использование полученных основных знаний, умений и компетенций на последующем уровне образования.

1. Для изучения дисциплины, необходимы знания и умения из читаемой на первом курсе дисциплины «Математический анализ».
2. Знания и умения, приобретаемые студентами после изучения дисциплины, будут использоваться при изучении Теоретических курсов физики.

## **III. Требования к результатам освоения дисциплины**

### **Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций**

Компетенция	ОПК-1: Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности
-------------	--

Индикаторы компетенции	ИДК <sub>опк 1.1</sub> Применяет физико-математический аппарат в сфере своей профессиональной деятельности принципы
Результаты обучения	<i>Знает:</i> основные понятия теории функций комплексного переменного, современные направления развития комплексного анализа и его приложения. <i>Умеет:</i> вычислять производные функций комплексного переменного, восстанавливать аналитическую функцию по её действительной или мнимой части. <i>Владеет:</i> методами нахождения области сходимости функций комплексного переменного.

#### IV. Содержание и структура дисциплины

Объем дисциплины составляет 5 зачетных единицы, 180 часа, в том числе 111 часов контактной работы.

Занятия проводятся только в очной форме обучения с применением дистанционного контроля самостоятельной работы студентов через ЭИОС факультета. Электронной и дистанционной форм обучения не предусматривается.

На практическую подготовку отводится 60 аудиторных часов.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

#### 4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

№ п/п	Раздел дисциплины/темы	С	Вс	Из них практическая подготовка обучающихся	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу обучающихся, практическую подготовку и трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости; Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
					Контактная работа преподавателя с обучающимися				
					Лекции	Семинарские /практические /лабораторные занятия	Консультации		
1	1-16	4	180	60	40	60	1	43	Практическое задание; экзаменационные билеты
Итого:			180	60	40	60	1	43	

#### 4.2 План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Семестр	Название раздела, темы	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самостоятельной
		Вид самостоятельной работы	Сроки выполнения	Трудоемкость (час.)		

						работы
4	Тема 1-9	Задание в виде задачи	После пройденных тем	43	Демонстрация готовых решений	Источники из основной и дополнительной литературы по теме практических занятий; Образовательные ресурсы, доступные по логину и паролю, предоставляемым Научной библиотекой ИГУ.

### 4.3. Содержание учебного материала

#### Содержание разделов и тем дисциплины

##### Тема 1. Комплексные числа. Функции комплексного переменного

Комплексные числа и действия над ними. Геометрическое изображение комплексных чисел. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Возведение комплексных чисел в степень и извлечение корня из комплексных чисел. Изображение комплексных чисел на сфере. Бесконечно удаленная точка. Стереографическая проекция. Расширенная комплексная плоскость. Множество точек на комплексной плоскости. Определение функции комплексного переменного и ее предела. Непрерывность функции.

Тема 2. Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитические функции. Конформное отображение Производная функции комплексного переменного. Правила дифференцирования функции. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции комплексного переменного. Аналитическая функция, ее свойства. Гармонические и сопряженные гармонические функции. Связь гармонической и аналитической функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Степенная функция. Показательная и логарифмическая функции.

##### Тема 3. Интегрирование функций комплексного переменного

Интеграл по комплексному переменному, его свойства. Интегральная теорема Коши. Теорема Коши для многосвязной области. Первообразная и интеграл функции комплексного переменного. Интегральная формула Коши. Свойства аналитических функций. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля аналитической функции. Теорема Морера.

##### Тема 4. Ряды аналитических функций. Теория вычетов.

Числовые ряды. Общий критерий сходимости рядов. Абсолютная сходимость ряда. Сложение и вычитание рядов. Перестановка членов ряда. Умножение рядов. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряд Тейлора. Теорема Тейлора. Целая функция. Теорема Лиувилля. Ряд Лорана. Правильная и главная части ряда Лорана. Теорема Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Устранимые особые точки. Нули аналитической функции. Полюс. Ряд Лорана в окрестности особой точки. Существенно особые точки. Мероморфная функция. Вычет функции. Вычеты в конечной устранимой точке. Вычисление вычета в полюсе и в существенно особой точке. Основная теорема теории вычетов. Вычет в бесконечно удаленной точке. Вычисление интеграла по замкнутому контуру.

##### Тема 5. Расчет интегралов и суммирование рядов с помощью теории вычетов

Вычисление интеграла Вычисление несобственных интегралов и интегралов от тригонометрических функций.

Суммирование рядов с помощью вычетов.

#### Тема 6. Преобразование Лапласа и его свойства

Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение. Свойства преобразования Лапласа. Таблица оригиналов и изображений. Нахождение изображений функций. Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа.

#### Тема 7. Логорифмический вычет

Логорифмический вычет. Теорема Руше. Основная теорема о корнях многочлена  $N$  – степени.

#### Тема 8. Конформные отображения

Конформное отображение. Необходимое и достаточное условие конформности отображения. Элементарные функции комплексного переменного. Линейная функция. Дробно – линейная функция. Круговое свойство дробно – линейного отображения. Свойство сохранения симметрии. Дробно – линейное отображение, переводящее три точки в три точки. Примеры дробно – линейных отображений.

#### Тема 9. Приложения теории функций комплексного переменного к задачам физики

Плоское течение жидкости. Обтекание контура. Применение преобразования Лапласа к расчету электрических контуров.

### 4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

№ п/п	№ раздела и темы дисциплины (модуля)	Наименование семинаров, практических и лабораторных работ	Трудоемкость (часы)	Оценочные средства	Формируемые компетенции
1	2	3	4	5	6
1.	Тема 1	Комплексные числа, Функции комплексного переменного	6	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
2.	Тема 2	Дифференцирование функции комплексного переменного. Аналитические функции.	8	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
3.	Тема 3	Интеграл по комплексной переменной. Интеграл Коши	10	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
4.	Тема 4	Ряды аналитических функций. Теория вычетов	8	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
5.	Тема 5	Расчет интегралов и суммирование рядов с помощью теории вычетов	10	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
6.	Тема 6	Преобразование Лапласа и его свойства	10	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
7.	Тема 7	Логарифмический вычет Теорема Руше	8	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1

### 4.3.2. План самостоятельной работы студентов

№ нед	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Часы
1	Комплексные числа и действия над ними. Функции комплексного переменного.	Внеаудиторная, решение задач	1.04(4), 1.05(2), 1.06(3,9), 1.07(8,9,10), 1.14(5), 1.13(4,8,10), 1.57, 1.58(4,6,7). К.К.М. 16(в,г), 17(б), 58(а), 59(в), 61(а,в), 67(б,г,ж), 68(б), 75, 74.	Источники из основной и дополнительной литературы	5
2	Дифференцирование ФКП. Условия Коши-Римана и их использование. Гармонические функции.	Внеаудиторная, решение задач	8.07(1), 8.31(3,4), 8.36, 8.40(2), 8.51(2,5) К.К.М. 104, 105.		5
3	Интегрирование ФКП. Теорема Коши и её использование. Формулы Коши.	Внеаудиторная, решение задач	3.64, 3.65, 10.13(4), 10.20, 10.22, 10.23(3,4). 10.27; К.К.М. 141, 146(б).		4
4	Ряд Тейлора	Внеаудиторная, решение задач	11.06(2); К.К.М. 210, 216, 221.		4
5	Аналитическое продолжение	Внеаудиторная, решение задач	12.07(4), 13.26, 13.28(1), 13.31(4).		2
6	Многозначные функции. Выделение регулярных ветвей.	Внеаудиторная, решение задач	17.07, 17.12(1,2), 17.13(3), 17.17(3), 18.04, 18.05(1), 18.06(2,4).	Источники из основной и дополнительной литературы	5
7	Ряд Лорана. Особые точки.	Внеаудиторная, решение задач	19.15(2), 20.16(3), 20.21(3,4).		5
8	Вычисление вычетов. Интегралы по замкнутому контуру.	Внеаудиторная, решение задач	21.03(3), 21.09(4), 21.12(2), 22.01(4), 22.02(1,5,14), 22.04(3), 22.05(7).		4
9	Несобственные интегралы.	Внеаудиторная, решение задач	28.15(2,9). 28.03(2), 28.05(9,14), 28.07(11).		4
10	Интегралы от многозначных функций.	Внеаудиторная, решение задач	28.22(2), 28.29(3), 29.20(7).	2	

11	Теорема Руше.	Внеауди- торная, ре- шение за- дач	23.09, К.К.М. 434, 438, 442.		1
12	Суммирование рядов.	Внеауди- торная, ре- шение за- дач	30.02, 30.03(5,6,8,9).		1
13	Конформное отобра- жение. Дробно-линей- ная функция	Внеауди- торная, ре- шение за- дач	32.01(2,4), 33.19(2,4), 35.05(2); К.К.М. 460, 476, 503.		1

#### 4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

В разделе 4.3.2 студентам для самостоятельного углубленного изучения дисциплины (параллельно с лекциями) предлагаются задачи по изучаемым разделам. Предполагается, что студент самостоятельно изучит дополнительные параграфы по пройденной теме, представленные в литературе из п. 5, а затем решит предложенные задачи. Оценка самостоятельной работы студентов проводится на практических занятиях.

#### 4.5. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Учебным планом не предусмотрено написание курсовых работ (проектов).

### V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

#### а) список литературы

основная литература

1. Евграфов, М.А. Аналитические функции [Электронный ресурс] / М. А. Евграфов. - Москва : Лань, 2008. - 447 с. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-0809-2

2. [Краснов, М. Л.](#) Функции комплексного переменного: задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие для студ. вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. - 4-е изд., испр. - М.: КомКнига, 2006. - 205 с. - ISBN 5-484-00462-4 (96 экз.)

дополнительная литература

1. [Лаврентьев, М. А.](#) Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. - 6-е изд., стер. - М. : Лань, 2002. - 688 с. - ISBN 5-9511-0014-3 (2 экз.)

2. [Сидоров, Ю. В.](#) Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 1982. - 488 с (3)

3. [Свешников, А. Г.](#) Теория функций комплексной переменной / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. - 4-е изд., стер. - М. : Наука, 1979. -319 с. (5)

#### б) периодические издания

- нет

#### в) список авторских методических разработок

— нет

#### в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

<http://library.isu.ru/> - Научная библиотека ИГУ;



Образовательные ресурсы, доступные по логину и паролю, предоставляемым Научной библиотекой ИГУ:

- <https://isu.bibliotech.ru/> - ЭЧЗ «БиблиоТех»;
- <http://e.lanbook.com> - ЭБС «Издательство «Лань»;
- <http://rucont.ru> - ЭБС «Рукопт» - межотраслевая научная библиотека, содержащая оцифрованные книги, периодические издания и отдельные статьи по всем отраслям знаний, а также аудио-, видео-, мультимедиа софт и многое другое;
- <http://ibooks.ru/> - ЭБС «Айбукс»- интернет ресурсы в свободном доступе;

## VI. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебная аудитория для проведения занятий. Для проведения занятий лекционного типа в качестве демонстрационного оборудования используется меловая доска. Наглядность обеспечивается путем изображения схем, диаграмм и формул с помощью мела. Использование глобальной компьютерной сети позволяет обеспечить доступность Интернет-ресурсов и реализовать самостоятельную работу студентов. На лекциях могут использоваться мультимедийные средства: проектор, переносной экран, ноутбук. На факультете имеется компьютеризированная аудитория, предназначенная для самостоятельной работы, с неограниченным доступом в Интернет.

Материалы: учебно-методические пособия, задания для аудиторной и самостоятельной работы студентов.

## VII. Образовательные технологии:

Задачи изложения и изучения дисциплины реализуются в следующих формах деятельности:

- лекции, нацеленные на получение необходимой информации, и ее использование при решении практических задач;
- практические занятия, направленные на активизацию познавательной деятельности студентов и приобретения ими навыков решения практических и проблемных задач;
- консультации –еженедельно для всех желающих студентов;
- самостоятельная внеаудиторная работа направлена на приобретение навыков самостоятельного решения задач по дисциплине;
- текущий контроль за деятельностью студентов осуществляется на лекционных и практических занятиях в ходе самостоятельного решения задач, в том числе у доски.

## VIII. Оценочные материалы для текущего контроля и промежуточной аттестации

Фонд оценочных средств представлен в приложении.

8.1. Оценочные средства для входного контроля: не требуются.

8.2. Оценочные средства текущего контроля.

Примерные вопросы и задания текущего контроля

$$f'(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z}$$

1. Найти производную от функции
2. Найти  $U(x,y)$ , если  $V(x,y)=x^2-y^2+2xy$ ,  $f(0)=0$ .
3. Найти вещественную и мнимую часть функции  $\cos(z^2)$ .
4. Определение комплексного числа. Операции сложения, умножения.
5. Мнимая единица. Комплексное сопряжение. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
6. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная форма.
7. Свойства операций с комплексными числами. Деление.
8. Геометрическая интерпретация комплексного числа.
9. Извлечение корней из комплексных чисел (примеры).
10. Последовательности комплексных чисел. Определение предела последовательности.

Условия сходимости последовательности.

11. Критерий Коши сходимости последовательностей.

12. Расширенная комплексная плоскость. Бесконечно удаленная точка. Стереографическая проекция.

13. Определение функции комплексной переменной. Области, границы областей.

8.3. Оценочные средства промежуточного контроля.

Форма проведения промежуточной аттестации — экзамен.

### Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Понятие комплексного числа. Действия над комплексными числами и их геометрическое истолкование. Примеры.
2. Тригонометрическая и показательная формы комплексных чисел. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из комплексного числа. Примеры.
3. Сфера Римана. Расширенная комплексная плоскость. Множества точек на комплексной плоскости.
4. Функция комплексного переменного и ее предел.
5. Непрерывность функции комплексного переменного.
6. Производная функции комплексного переменного. Правила дифференцирования функции.
7. Производная функции комплексного переменного. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции (теорема).
8. Аналитическая функция, ее свойства.
9. Гармонические функции. Связь гармонической и аналитической функции (теорема).
10. Производная функции комплексного переменного. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции.
11. Конформное отображение. Примеры.
12. Элементарные функции комплексного переменного. Линейная функция.
13. Элементарные функции комплексного переменного. Дробно-линейная функция.
14. Элементарные функции комплексного переменного. Степенная функция.
15. Элементарные функции комплексного переменного. Показательная и логарифмическая функции.
16. Интеграл от функции комплексного переменного, его свойства.
17. Интегральная теорема Коши.
18. Интегральная формула Коши.
19. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля аналитической функции. Теорема Морера.
20. Числовые ряды. Общий критерий сходимости рядов. Абсолютно сходящиеся ряды. Перестановка членов ряда.

**Пример тестовых заданий для проверки сформированности компетенций, указанных выше п.3:**

1	Вычет в полюсе n порядка	$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n f(z)$ $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^n f(z)$ $\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^n f(z)$
2	Гармоническая функция $u(z)$	$\Delta u(x, y) = 0$

		$\Delta u(x, y) = \lambda u(x, y)$ $\nabla u(x, y) = 0$
3	Вычет в бесконечно удаленной точке	-С <sub>-1</sub> ряда Лорана при разложении по z С <sub>-1</sub> ряда Лорана при разложении по z С <sub>1</sub> ряда Лорана при разложении по z
4	Основная теорема линейной алгебры	У полинома n степени в комплексной плоскости ровно n нулей. У полинома n степени в комплексной плоскости ровно n-1 нуль. Все нули полинома n степени лежат на вещественной оси.

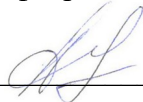
**Разработчики:**



доцент кафедры теоретической физики С.В. Ловцов

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 03.03.02 Физика.

Программа рассмотрена на заседании кафедры теоретической физики  
«15» марта 2024 г.

Протокол №7 И.о. зав. кафедрой \_\_\_\_\_  С.В. Ловцов

**Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.**