



## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФГБОУ ВО «ИГУ»

Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета

/Н.М. Буднев

«02» апреля 2025 г.



### Рабочая программа дисциплины

Наименование дисциплины: Б1.О.13.02 Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Направление подготовки: 11.03.04 Электроника и наноэлектроника

Направленность (профиль) подготовки: Электроника и наноэлектроника

Квалификация (степень) выпускника: Бакалавр

Форма обучения: Очная

Согласовано с УМК физического факультета

Протокол №49 от «26» марта 2025 г.

Председатель

Н.М. Буднев

Рекомендовано кафедрой:

Протокол №6

От «24» марта 2025 г.

Зав. кафедрой

С.В. Ловцов

Иркутск 2025 г.

## Содержание

I. Цели и задачи дисциплины (модуля).....	3
II. Место дисциплины в структуре ОПОП.....	4
III. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля) .....	4
IV. Содержание и структура дисциплины .....	4
4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов.....	4
4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине .....	5
4.3. Содержание учебного материала .....	5
4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ.....	9
4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы .....	10
4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов....	12
4.5. Примерная тематика курсовых работ (проектов).....	12
V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):.....	13
а) список литературы.....	13
б) периодические издания.....	13
в) список авторских методических разработок.....	14
г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы .....	14
VI. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля):.....	14
VII. Образовательные технологии:.....	14
VIII. Оценочные материалы для текущего контроля и промежуточной аттестации .....	14
Приложение: фонд оценочных средств	

## I. Цели и задачи дисциплины (модуля)

**Цели** - изучение основных математических понятий и представлений линейной алгебры и аналитической геометрии, на основе которых создаются математические модели физических явлений и законов в линейном приближении, изучение различных числовых множеств и структур, построенных на числовых множествах, линейные и евклидовы пространства, линейные и полилинейные функции и функционалы, преобразования, линейные операторы, системы линейных уравнений и методы их решения.

Знания, полученные при изучении «Линейной алгебры и аналитической геометрии» формируют математическую культуру, составляют основу естественнонаучного подхода исследования природных явлений. Изучение основных разделов линейной алгебры и геометрии, необходимых для понимания других дисциплин математики, а также дисциплин классической и квантовой физики. Координатный метод формулировки и исследования геометрических вопросов относится к числу важнейших концепций современной математики. Его возможности и сфера применения выходят далеко за рамки тех простейших результатов, которые ныне принято относить к аналитической геометрии. Стандартный курс аналитической геометрии необходим для формирования общей физико-математической культуры, так как позволяет на уже знакомых студенту простых примерах осознать то, как алгебраические и аналитические методы используются для постановки и решения чисто геометрических задач. Кроме того, при изучении аналитической геометрии учащийся приобретает начальные навыки в проведении расчетов алгебраического характера с векторными и матричными объектами, учится сопоставлять им наглядное геометрическое истолкование. Элементарные вопросы геометрического содержания повсеместно возникают на различных этапах постановки и решения конкретных задач теоретической механики, электродинамики, оптики, квантовой механики и статистической физики.

При изучении дисциплины решаются следующие задачи:

- изучение основных понятий линейной алгебры, методов и приемов математических доказательств теорем и утверждений
- овладение практическими навыками и приемами вычислений определителей матриц, операций над матрицами, решения систем линейных алгебраических уравнений, законов преобразований векторов и матриц, решения характеристического уравнения, нахождения собственных векторов и собственных значений, операций над квадратичными формами, вычисления функций от матриц и т.д.
- формирование у студентов умений и навыков самостоятельного приобретения и применения знаний при исследовании и построении математических моделей;
- овладение знаниями по применению алгебры в различных разделах физики при описании физических явлений;
- продемонстрировать использование векторных и матричных расчетов на примере рассмотрения хорошо известных вопросов элементарной геометрии в рамках координатного метода описания;
- сообщить необходимую совокупность геометрических фактов и результатов, используемых в дальнейшем при изучении фундаментальных и прикладных дисциплин физико-математического цикла, необходимых будущему выпускнику в его повседневной деятельности;
- пояснить геометрическое происхождение и содержание ряда основных физических величин, относящихся преимущественно к механике материальной точки и системы материальных точек.
- формировать твердые навыки в постановке задач и в их решении координатным методом в случаях, когда геометрические объекты описываются системами линейных уравнений и неравенств;
- овладение приемами и способами исследования линейных уравнений и систем линейных уравнений с двумя и тремя переменными с использованием векторного и матричного

ного исчисления.

## II. Место дисциплины в структуре ОПОП

Линейная алгебра и аналитическая геометрия относится к дисциплинам обязательной части основной профессиональной образовательной программы и является обязательной для освоения. Основные требования к входным знаниям связаны со знаниями и навыками, владением вычислительными методами и приемами решения стандартных задач. Изучаемая дисциплина является базовой для изучения таких дисциплин как «Дифференциальные и интегральные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Методы математической физики», а также ряда дисциплин теоретической физики: «Электродинамика», «Квантовая механика».

## III. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля)

**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций**

Компетенция	ОПК-1: Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности	
Индикаторы компетенции	ОПК 1.1	Применяет базовые знания в области физики для решения научно- исследовательских задач
	ОПК 1.2	Применяет базовые знания в области физики для решения прикладных задач профессиональной деятельности
	ОПК 1.3	Представляет слушателям в доступной для восприятия форме знания в области физики, в том числе при выполнении задач в сфере педагогической деятельности

## IV. Содержание и структура дисциплины

Объем дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов, в том числе 85 часов контактной работы.

Занятия проводятся в очной форме обучения с применением дистанционного контроля самостоятельной работы студентов через ЭИОС факультета. Электронной и дистанционной форм обучения не предусматривается.

На практическую подготовку отводится 34 часа.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

### 4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

№ п/п	Раздел дисциплины/темы	Се- ме- ст- р	Вс- ег- о- ча- со- в	Из них практиче- ская подго- товка обу- чающихся	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу обучающихся, практическую подготовку и трудоемкость (в часах)				Формы те- кущего кон- троля успе- ваемости; Форма про- межуточной аттестации (по семест- рам)
					Контактная работа преподавателя с обучающимися			Самостоя- тельная работа	
					Лекции	Семинар- ские /практически е /лабораторн ые занятия	Консульта- ции		
1	Блоки 1 и 2	1	180	34	34	34	1	69	Практиче- ское зада-

									ние; Экзамен
Итого:		180	34	34	34	1	69		

#### 4.2 План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Семестр	Название раздела, темы	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы
		Вид самостоятельной работы	Сроки выполнения	Трудоемкость (час.)		
1	Блоки 1 и 2	Домашнее задание в виде задач и вопросов	После пройденных тем	69	Демонстрация готовых решений	Основная и дополнит. литература. Образовательные ресурсы, доступные по логину и паролю НБ ИГУ.

#### 4.3. Содержание учебного материала

##### **Блок 1. Линейная алгебра**

##### **Тема 1. Матрицы и определители**

1. Введение. Линейность в физике и математике. Матрицы, операции над матрицами, свойства операций. Транспонирование. Линейное преобразование. Блочные матрицы, прямая сумма матриц, алгебраические свойства прямой суммы. Коммутатор и антикоммутатор. След матрицы. Группа подстановок и симметрическая группа.

2. Определитель матрицы (два определения). Минор и алгебраическое дополнение. Два типа миноров. Теорема № 1 Лапласа. Основные свойства определителей. Определитель произведения матриц  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ , Теорема №2. Обратная матрица, Теорема № 3. Матричные уравнения.

3. Линейная зависимость строк и столбцов матрицы, Теорема № 4. Ранг и базисный минор матрицы. Элементарные преобразования строк матрицы. Методы вычисления ранга: метод элементарных преобразований и метод окаймляющих миноров. Теорема № 5 о базисном миноре. Ранг произведения матриц:  $\text{Rang}(AB)$ . Теорема № 6 о  $\det(A) = 0$ .

##### **Тема 2. Линейное пространство**

4. Линейное пространство, вещественное и комплексное. Основные примеры линейных пространств. Линейная комбинация и линейная зависимость векторов, теорема № 7. Размерность пространства. Базис и координаты. Примеры базисов. Единственность разложения вектора по базису, теорема № 8.

5. Подпространство и линейная оболочка системы векторов, размерность линейной оболочки. Прямая сумма линейных пространств, теорема № 9. Объединение и пересечение линейных пространств, теорема № 10 о размерности объединения пространств. Изоморфизм линейных пространств, теорема № 11. Преобразование координат вектора при преобразовании базиса.

##### **Тема 3. Системы линейных уравнений**

6. Системы линейных уравнений (СЛУ). Способы записи и их классификация. Совместность СЛУ, теорема № 12 Кронекера-Капелли. Крамеровские системы линейных неоднородных уравнений. Формула Крамера. Метод К.Гаусса решения системы линейных

уравнений. Решение однородной СЛУ, тривиальное и нетривиальное решения, теорема № 13. Фундаментальная система решений однородной СЛУ. Общее решение, пространство решений. Свойства решений неоднородной и соответствующей однородной системы уравнений.

#### Тема 4. Евклидово и унитарное пространство

7. Система аксиом скалярного произведения. Комплексное и вещественное евклидовы пространства. Общий вид задания скалярного произведения конечномерного линейного пространства. Основные примеры задания скалярных произведений в различных линейных пространствах. Неравенство Коши - Буняковского. Примеры неравенств Коши - Буняковского. Определения угла между двумя векторами и нормы (длины) вектора. Нормированное пространство.

8. Ортогональность векторов и ортогональный базис, теорема № 14. Свойства ортогонального базиса. Метод ортогонализации Грама - Шмидта, теорема № 15. Матрица Грама. Геометрический смысл определителя матрицы Грама.

#### Тема 5. Линейные операторы в конечномерном линейном пространстве

9. Линейный оператор. Операции над линейными операторами и их свойства. Пространство линейных операторов. Матрица линейного оператора в конечномерном линейном пространстве. Ядро и образ линейного оператора, примеры. Теорема № 16 о сумме размерностей ядра и образа. Ранг линейного оператора. Обратный оператор и условия существования обратного оператора.

10. Структура линейного оператора. Инвариантное пространство. Вид матрицы линейного оператора в случае существования инвариантных пространств. Одномерные инвариантные подпространства. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора, теорема № 17. Характеристическое уравнение и характеристический полином.

11. Спектр линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора, теорема № 18. Подобные матрицы и их свойства. Теорема № 19 о свойствах собственных векторов линейного оператора. Диагонализация матрицы линейного оператора, теорема № 20. Понятие жордановой формы матрицы.

12. Сопряженный оператор, теорема № 21. Эрмитов оператор и свойства операции эрмитово сопряжение. Свойство собственных векторов и собственных значений эрмитова оператора, теорема № 22. Унитарный (ортогональный) оператор и его основные свойства.

Общий вид ортогонального оператора на плоскости.

#### Тема 6. Билинейные и квадратичные формы, функции от матриц

13. Билинейная и квадратичная формы. Полуторалинейная форма. Классификация квадратичных форм, критерий Сильвестра. Нормальный и канонический виды квадратичной формы. Преобразование квадратичной формы при преобразовании базиса, теорема № 23. Ранг квадратичной формы. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к сумме квадратов. Метод ортогонального преобразования квадратичной формы к каноническому виду, теорема № 24. Закон инерции. Одновременное приведение двух квадратичных форм к сумме квадратов, теорема № 25.

14. Спектральное разложение эрмитова оператора. Свойства проекционных операторов. Теорема № 26 Гамильтона - Кэли.

15. Функции от матриц. Полиномиальная матрица и минимальный полином. Интерполирующий полином Лагранжа - Сильвестра.

## Блок 2. Аналитическая геометрия

### Раздел 1 МАТРИЦЫ И ДЕТЕРМИНАНТЫ $2 \times 2$ и $3 \times 3$

**Тема 1.** Координатный метод формулировки и исследования геометрических вопросов, его роль в рамках современной математики. Основные системы координат, используемые на практике: прямоугольная декартова, косоугольная декартова, цилиндрическая и сферическая. Преобразования координат и свойства симметрии.

**Тема 2.** Матрицы  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$  и их связь с линейными преобразованиями координат. Де-

терминанты матриц преобразования в двух и трех измерениях, правила вычисления, основные свойства и геометрический смысл. След матрицы и его свойства.

**Тема 3.** Правило умножения матриц и его геометрическая мотивировка. Теорема о детерминанте произведения матриц. Представление об обратной матрице как матрице обратного преобразования. Вырожденные матрицы, критерий существования обратной матрицы. Нахождение обратной матрицы в случае матриц  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ .

**Тема 4.** Квадратные системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными, критерий однозначной разрешимости и формулы Крамера. Представление о методе Гаусса. Геометрическое истолкование однозначной разрешимости, несовместной системы и системы с бесконечным числом решений. Ортогональные матрицы и их свойства.

#### Раздел 2 ВЕКТОРЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

**Тема 5.** Векторы как направленные отрезки. Совокупности векторов. Линейная независимость и линейная зависимость совокупности векторов. Базисные векторы и разложение заданного вектора. Координаты вектора в базисе. Действия с векторами в координатном представлении.

**Тема 6.** Изменение координат вектора при замене базиса и начала координат. Представление евклидовых движений с фиксированным началом ортогональными матрицами. Поворот и сдвиг прямоугольной декартовой системы координат. Матрица поворота и ее свойства. Некоммутативность трехмерных поворотов.

**Тема 7.** Скалярное произведение векторов, его линейность. Векторное произведение и его свойства. Кососимметричность. Представление векторное произведение в ортогональном базисе при помощи символического определителя. Формула для двойного векторного произведения “ВАС-САВ”. Смешанное произведение и его геометрический смысл.

#### Раздел 3 ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

**Тема 8.** Способы задания прямой линии на плоскости: векторное уравнение в параметрической форме, нормальное векторное уравнение, каноническое уравнение и общее уравнение в декартовой системе координат. Случаи параллельности и перпендикулярности двух прямых, угол между двумя прямыми. Расстояние от заданной точки до заданной прямой.

**Тема 9.** Способы задания плоскости в пространстве: векторное уравнение в параметрической форме, нормальное векторное уравнение и общее уравнение в декартовой системе координат. Переход от одной формы к другой. Плоскость, проходящая через три данные точки. Расстояние от заданной точки до заданной плоскости. Угол между двумя плоскостями.

**Тема 10.** Направляющий вектор прямой, параметрическое уравнение прямой в пространстве. Описание прямой в терминах векторного произведения. Каноническое уравнение прямой в пространстве. Переход от одного способа задания к другому. Параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые.

**Тема 11.** Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми. Построение взаимного перпендикуляра для таких прямых. Ортогональная проекция прямой на плоскость в случае их пересечения, разложение направляющего вектора на две взаимно перпендикулярные компоненты. Параметрическое уравнение перпендикуляра к плоскости.

**Тема 12.** Пучок плоскостей, способы его описания. Прямая линия как пересечение двух плоскостей. Вычисление расстояния от заданной точки до заданной прямой в пространстве. Уравнение перпендикуляра, опущенного из заданной точки на заданную прямую.

#### Раздел 4 КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Тема 13.** Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости и стандартная его запись. Вырожденные и невырожденные кривые второго порядка. Три типа кривых второго порядка: эллиптический, параболический и гиперболический. Эллипс, парабола и гипербола как конические сечения.

**Тема 14.** Основные геометрические свойства эллипса, параболы и гиперболы. Фокальные точки, эксцентриситет и директрисы для этих кривых. Уравнение невырожденной кри-

вой второго порядка в полярной системе координат. Уравнение касательной к кривой в заданной точке.

**Тема 15.** Изменение коэффициентов в общем уравнении кривой второго порядка при преобразовании декартовой системы координат. Три инварианта кривой второго порядка. Использование инвариантов для приведения уравнения кривой второго порядка к простейшему виду. Инварианты как матричные характеристики.

**Тема 16.** Уравнение кривой второго порядка как квадратичная форма двух переменных. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью ортогональных преобразований. Каноническая система координат, переход к ней путем поворота и последующего сдвига системы.

#### 4.3.1. Перечень семинарских (практических) занятий

##### Блок 1. Линейная алгебра

№	№ раздела и темы дисциплины (модуля)	Наименование семинаров, практических и лабораторных работ (практические занятия)	Трудоемкость (часы)	Оценочные средства	Формируемые компетенции
1	2	3	4	5	6
1	1	Матрицы и определители	3	Комплект заданий	ОПК-1
2	2	Линейное пространство	3	Комплект Заданий	ОПК-1
3	3	Системы линейных уравнений	3	Комплект заданий	ОПК-1
4	4	Евклидово и унитарное пространство	3	Комплект заданий	ОПК-1
5	5	Линейные операторы в конечномерном линейном пространстве	4	Комплект заданий	ОПК-1
6	6	Билинейные и квадратичные формы, функции от матриц	4	Комплект заданий	ОПК-1

##### Блок 2. Аналитическая геометрия

№ п/п	№ раздела и темы дисциплины (модуля)	Наименование семинаров, практических и лабораторных работ	Трудоемкость (часы)	Оценочные средства	Формируемые компетенции
1	2	3	4	5	6
1.	Раздел 1, Тема 1	Основные системы координат на плоскости и в пространстве, линейные преобразования декартовых координат.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
2.	Раздел 1, Тема 2	Матрицы 2x2 и 3x3. Детерминанты.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
3.	Раздел 2, Тема 3	Базисные векторы и разложение вектора по базису. Векторы в координатном представлении.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
4.	Раздел 2, Тема 4	Поворот прямоугольной декартовой системы координат. Матрица поворота и ее свойства.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1

5.	Раздел 2, Тема 5	Скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение и их свойства.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
6.	Раздел 3, Тема 6	Прямая линия на плоскости, способы задания. Вычисление расстояния от точки до прямой.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
7.	Раздел 3, Тема 7	Плоскость в трехмерном пространстве, способы задания. Вычисление расстояния от точки до плоскости.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
8.	Раздел 3, Тема 10	Прямая в пространстве, способы задания. Параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
9.	Раздел 3, Тема 11	Расстояние между скрещивающимися прямыми и взаимный перпендикуляр. Ортогональная проекция прямой на плоскость.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
10.	Раздел 3, Тема 12	Прямая линия как пересечение двух плоскостей и пучок плоскостей. Расстояние от точки до прямой в пространстве.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
11.	Раздел 4, Тема 13	Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости. Вырожденные и невырожденные кривые второго порядка. Три типа кривых второго порядка.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
12.	Раздел 4, Тема 14	Основные свойства эллипса, параболы и гиперболы. Фокальные точки, эксцентриситет и директрисы. Уравнение касательной.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
13.	Раздел 4, Тема 15	Инварианты кривой второго порядка и их использование для приведения уравнения кривой простейшему виду. Инварианты как матричные характеристики.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1
14.	Раздел 4, Тема 16	Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью поворота и сдвига.	1	Задание на семинаре в виде задачи	ОПК-1

#### 4.3.2 Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

##### Блок 1. Линейная алгебра

№ нед.	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
1	Матрицы и определители	Контрольное задание	Комплект заданий	См. п. 8. а) основная и б) дополнительная литература	2
2	Линейное пространство	Контрольное задание	Комплект заданий	См. п. 8. а) основная и б) дополнительная литература	2
3	Системы линейных уравнений	Контрольное задание	Комплект заданий	См. п. 8. а) основная и б) дополнительная литература	4

4	Евклидово и унитарное пространство	Контрольное задание	Комплект заданий	См. п. 8. а) основная и б) дополнительная литература	4
5	Линейные операторы в конечномерном линейном пространстве	Контрольное задание	Комплект заданий	См. п. 8. а) основная и б) дополнительная литература	5
6	Билинейные и квадратичные формы, функции от матриц	Контрольное задание	Комплект заданий	См. п. 8. а) основная и б) дополнительная литература	6

### Блок Аналитическая геометрия

№ нед.	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
1	Системы координат, преобразования координат.	Внеаудиторная, решение задач	Найти изменение декартовых координат заданных точек при сдвиге и повороте.	Источники из основной и дополнительной литературы по теме практических занятий; Образовательные ресурсы, доступные по логину и паролю, предоставляемым Научной библиотекой ИГУ и Сторонние сайты	2
2	Матрицы и детерминанты.	Внеаудиторная, решение задач	Действия с матрицами $2 \times 2$ и $3 \times 3$ . Вычисление детерминантов.		2
3	Умножение матриц, обратная матрица.	Внеаудиторная, решение задач	Нахождение обратной матрицы для невырожденных матриц $2 \times 2$ и $3 \times 3$ .		2
4	Системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными.	Внеаудиторная, решение задач	Случай однозначной разрешимости, применение формул Крамера. Представление о методе исключения Гаусса.		5
5	Разложение заданного вектора в базисе.	Внеаудиторная, решение задач	Найти компоненты данного вектора в заданном базисе.		5
6	Описание поворотов с помощью матриц.	Внеаудиторная, решение задач	По заданной ортогональной матрице определить направление оси и угол поворота.		5
7	Свойства векторного и смешанного произведения.	Внеаудиторная, решение задач	Использование векторного и смешанного произведения при вычислении площадей или объемов фигур.		5
8	Взаимное расположение точек и прямой на плоскости.	Внеаудиторная, решение задач	Вычисление координат проекции заданной точки на данную прямую и точки, симметричной относительно прямой.		5
9	Расположение точек и плоскости в пространстве.	Внеаудиторная, решение задач	Вычисление координат проекции заданной точки на данную плоскость и точки, симметричной относительно плоскости.		5

10	Способы задания прямой в пространстве, направляющий вектор прямой	Внеаудиторная, решение задач	Связь векторного уравнения прямой в параметрической форме к каноническими, вычисление расстояния между скрещивающимися прямым.		4
11	Задачи на скрещивающиеся прямые.	Внеаудиторная, решение задач	Построение уравнения взаимного перпендикуляра для двух скрещивающихся прямых.		3
12	Прямая линия и пучок плоскостей.	Внеаудиторная, решение задач	Построение уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую.		3

Контрольные задания, поименованные в предыдущей таблице

	Тема контрольного задания	Номера задач	Срок выполнения
1	Операции над матрицами	790 791 798 801 809 815 817 828	1 неделя
2	Определитель матрицы. Обратная матрица.	45 54 60, 116 121 236 275 279 300 426 837 840 844 865	1 неделя
3	Линейное пространство. Линейная зависимость. Базис и координаты.	643, 665, 672, 674, 683, 1278 1280 1282 1291, 1292, 1311, 1318	1 неделя
4	Системы линейных уравнений. Евклидовы пространства.	693 697 701 708 726 727 731 736 737 742, 751 1354 1362 1366 1371 1381 1419 1444 1450 1452	2 недели
5	Линейные операторы. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.	1469 1471 1504 1541 1585	1 неделя
6	Квадратичные формы. Функции от матриц.	1183 1225 1250 1258	1 неделя

Требования по выполнению домашнего задания

Задание выполняется в отдельной тетради (12 или 24 листа)

Задание должно быть выполнено полностью.

Решения задач, должны быть полными и, при необходимости, должны содержать описание применяемого метода и пояснения. Обязательно указывать условия задач и полученный ответ.

Задание оценивается по 5 – ти бальной системе.

0 баллов - задание не выполнялось

2 балл - задание не выполнено

3 балла - выполнено половина задания

4 балла - выполнено  $\frac{3}{4}$  задания

5 баллов - полное и хорошее выполнение

Комплекты заданий по каждой теме формируются по сборнику задач Проскуряков И.В. «Сборник задач по линейной алгебре» и Цубербиллер О.Н. «Сборник задач по аналитической геометрии»

**4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов**

Организация самостоятельного углубленного изучения дисциплины основана на выполнении комплектов контрольных домашних заданий (5-7 заданий). В перечень контрольных заданий включаются задачи по темам, не рассматриваемым на практических аудиторных занятиях. Это предполагает самостоятельный характер работы студента по изучению ряда

дидактических единиц. Предполагается, что студент самостоятельно изучит дополнительные параграфы по пройденной теме, используя основную и дополнительную литературу, а затем решит предложенные задачи. Оценка самостоятельной работы студентов проводится путем выставления баллов по 5-ти бальной накопительной системе (баллы суммируются) за выполненные контрольные задания.

#### 4.5. Примерная тематика курсовых работ (проектов)

Учебным планом написание курсовых работ (проектов) не предусмотрено.

### V. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):

#### а) список литературы

##### основная литература

1. [Ильин, В. А.](#) Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. - М. : Физматлит, 2005, 2010. - 278 с. - ISBN 5-9221-0481-0 (46 экз.)
2. [Фаддеев, Д. К.](#) Лекции по алгебре: Учеб. пособие / Д. К. Фаддеев. - 5-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2007. - 416 с. - ISBN 978-5-8114-0447-6 (49 экз.)
3. [Проскуряков, И. В.](#) Сборник задач по линейной алгебре: Учеб. пособие / И. В. Проскуряков. - 11-е изд., стер. - СПб.: Лань, 2008. - 475 с. - ISBN 978-5-8114-0707-1 (50 экз.)
4. [Беклемишев, Д. В.](#) Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] / Д. В. Беклемишев. - Москва : Лань", 2015. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-1844-2

##### дополнительная литература

1. [Курош, А. Г.](#) Курс высшей алгебры: учеб. для студ. вузов / А. Г. Курош. - 17-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2008. - 431 с. - ISBN 978-5-8114-0521-3 (49 экз.)
2. [Гельфанд, И. М.](#) Лекции по линейной алгебре [Электронный ресурс]: научное издание / И. М. Гельфанд. - 6-е изд., испр. - ЭВК. - М. : Добросвет : Университет, 2006. - 321 с. - Режим доступа: ЭЧЗ "Библиотех". - Неогранич. доступ. - ISBN 5-98227-173-X
3. [Фаддеев, Д. К.](#) Задачи по высшей алгебре [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д. К. Фаддеев, авт. И. С. Соминский. - Москва : Лань, 2008. - 288 с. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-0427-8
4. [Беклемишев, Д. В.](#) Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] / Д. В. Беклемишев. - Москва : Лань", 2015. - 310 с. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-1844-2
5. [Александров, П. С.](#) Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / П. С. Александров. - Москва : Лань, 2009. - 512 с. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-0908-2
6. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Л. А. Беклемишева [и др.]. - Москва : Лань, 2008. - 496 с. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-0861-0
7. [Цубербиллер, О. Н.](#) Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О. Н. Цубербиллер. - Москва : Лань, 2009. - 336 с. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-8114-0475-9
8. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Л. А. Беклемишева [и др.]. - Москва : Лань, 2008. - 496 с. : ил. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - Библиогр.: с. 495. - ISBN 978-5-8114-0861-0

#### б) периодические издания

- нет

### **в) список авторских методических разработок**

Учебное пособие по линейной алгебре (печать)

Учебное пособие по методам решения алгебраических задач (электр.)

### **г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы**

<http://library.isu.ru/> - Научная библиотека ИГУ;

Образовательные ресурсы доступны по логину и паролю НБ ИГУ:

- <https://isu.bibliotech.ru/> - ЭЧЗ «БиблиоТех»;
- <http://e.lanbook.com> - ЭБС «Издательство «Лань»;
- <http://rucont.ru> - ЭБС «Рукопт» - межотраслевая научная библиотека, содержащая оцифрованные книги, периодические издания и отдельные статьи по всем отраслям знаний, а также аудио-, видео-, мультимедиа софт и многое другое;
- <http://ibooks.ru/> - ЭБС «Айбукс»- интернет ресурсы в свободном доступе.

## **VI. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля):**

Учебная аудитория для проведения лекционных и практических занятий. Для проведения занятий лекционного типа в качестве демонстрационного оборудования используется меловая доска. Наглядность обеспечивается путем изображения схем, диаграмм и формул с помощью мела. Использование глобальной компьютерной сети позволяет обеспечить доступность Интернет-ресурсов и реализовать самостоятельную работу студентов. На лекциях могут использоваться мультимедийные средства: проектор, переносной экран, ноутбук. На факультете имеется компьютеризированная аудитория, предназначенная для самостоятельной работы, с неограниченным доступом в Интернет.

## **VII. Образовательные технологии:**

Задачи изложения и изучения дисциплины реализуются в следующих формах деятельности:

- лекции, нацеленные на получение необходимой информации, и ее использование при решении практических задач;
- практические занятия, направленные на активизацию познавательной деятельности студентов и приобретения ими навыков решения практических и проблемных задач;
- консультации –еженедельно для всех желающих студентов;
- самостоятельная внеаудиторная работа направлена на приобретение навыков самостоятельного решения задач по дисциплине;
- текущий контроль за деятельностью студентов осуществляется на лекционных и практических занятиях в ходе самостоятельного решения задач, в том числе у доски.

## **VIII. Оценочные материалы для текущего контроля и промежуточной аттестации**

Фонд оценочных средств представлен в приложении.

Примечание: Студент успешно прошел обучение в семестре и готов к сдаче экзамена, если он знает и понимает формулировки основных понятий и определений, знает формулировки теорем, умеет применять понятия и теоремы для решения задач и упражнений, знает методы решения и успешно решает задачи и упражнения, может привести примеры, характеризующие основные понятия алгебры (линейное пространство, базис, скалярное произведение ...)

### 8.1. Оценочные средства для входного контроля.

Оценочные средства для входного контроля не используются, так как дисциплина содержит в основном новые знания. Используемые же в дисциплине знания и простейшие методы вычислений освоены студентами в рамках аналитической геометрии, которая изучается в первом семестре непосредственно перед изучением данной дисциплины. Поэтому не рационально и нет необходимости, выделять учебное время на проведение входного контроля.

### 8.2. Оценочные средства текущего контроля

Оценочные средства текущего контроля состоят из контрольных письменных заданий, составленных из рекомендованных наборов задач и упражнений.

### Примеры контрольных заданий по линейной алгебре

8.1. Оценочные средства для входного контроля: не требуются.

8.2. Оценочные средства текущего контроля.

1	Проекция точки $P(1;5;2)$ на плоскость $2x-y-z+11=0$ имеет координаты	1) $P'(-1;6;3)$ 2) $P'(1;4;2)$ 3) $P'(2;5;1)$
2	Проекция точки $P(1;3;-4)$ на плоскость $3x+y-2z=0$ имеет координаты	1) $P'(-1;4;2)$ 2) $P'(-2;2;-2)$ 3) $P'(2;-5;-1)$
3	Проекция точки $P(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$ имеет координаты	1) $P'(1;3;-2)$ 2) $P'(1;4;-7)$ 3) $P'(1;-3;1)$
4	Проекция точки $P(4;1;6)$ на плоскость $x-y-4z+3=0$ имеет координаты	1) $P'(1;2;-2)$ 2) $P'(1;4;-7)$ 3) $P'(5;0;2)$
5	Проекция точки $P(-2;-6;1)$ на плоскость $2x+y-2z+3=0$ имеет координаты	1) $P'(0;-5;-1)$ 2) $P'(1;3;-2)$ 3) $P'(-1;1;2)$
6	Расстояние от точки $P(2;-1;3)$ до прямой $\frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$ равно	1) $\sqrt{114}$ 2) $\sqrt{124}$ 3) $\sqrt{144}$
7	Расстояние от точки $P(1;-2;2)$ до прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$ равно	1) $\sqrt{14}$ 2) $\sqrt{16}$ 3) $\sqrt{18}$
8	Расстояние от точки $P(-1;2;3)$ до прямой $\frac{x+7}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2}$ равно	1) $\sqrt{94}$ 2) $\sqrt{114}$ 3) $\sqrt{134}$
9	Расстояние от точки $P(0;2;1)$ до прямой $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$ равно	1) $\sqrt{40}$ 2) $\sqrt{42}$ 3) $\sqrt{44}$
10	Расстояние от точки $P(0;3;-1)$ до прямой $\frac{x+6}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ равно	1) $\sqrt{1644}$ 2) $\sqrt{1664}$ 3) $\sqrt{1684}$

11	Расстояние от точки $P(-5;2;3)$ до прямой $\frac{x+7}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2}$ равно	1) $\sqrt{11}$ 2) $\sqrt{12}$ 3) $\sqrt{14}$
12	Расстояние от точки $P(2;2;-2)$ до прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$ равно	1) $\sqrt{25}$ 2) $\sqrt{35}$ 3) $\sqrt{45}$
13	Расстояние от точки $P(0;3;1)$ до прямой $\frac{x+2}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ равно	1) $4\sqrt{19}$ 2) $4\sqrt{21}$ 3) $4\sqrt{23}$
14	Расстояние от точки $P(7;-2;3)$ до прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2}$ равно	1) $\sqrt{221}$ 2) $\sqrt{241}$ 3) $\sqrt{261}$
15	Расстояние от точки $P(4;-1;3)$ до прямой $\frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$ равно	1) $\sqrt{68}$ 2) $\sqrt{78}$ 3) $\sqrt{88}$
16	Площадь треугольника, построенного на двух векторах, составляет от модуля их векторного произведения долю	1) 1/6 2) 1/3 3) 1/2
17	Для 3x3 матрицы A отношение $\det(A)/\det(-A)$ равно	1) +1 2) -1 3) 2
18	Квадратная система однородных уравнений имеет нетривиальное решение, если детерминант матрицы коэффициентов	1) >0 2) =0 3) <0
19	Объем призмы, построенной на трех векторах, составляет от их смешанного произведения долю	1) 1/6 2) 1/3 3) 1/2
20	Из свойств: (a) коммутативность, (b) ассоциативность, (c) дистрибутивность при умножении на скаляр, операция сложения векторов удовлетворяет	1) (a) 2) (a), (b) 3) (a), (b), (c)
21	Количество инвариантов кривой второго порядка равно	1) 1 2) 2 3) 3
22	Скалярное произведение двух векторов ортогонального репера равно	1) 0; 2) +1; 3) -1
23	Количество независимых параметров в параметрическом уравнении плоскости равно	1) 1; 2) 2; 3) 3
24	Векторное произведение двух коллинеарных векторов равно	1) нуль-вектору 2) орту 3) единичному вектору
25	Детерминант ортогональной матрицы может принимать значения	1) +1 2) -1 3) $\pm 1$

Баллы начисляются в соответствии со следующими условиями:

- 1) если не отмечено ни одного ответа, то баллы за данный вопрос не начисляются;
- 2) если отмечено более одного ответа, то баллы за данный вопрос не начисляются;
- 3) если отмечен неверный ответ, то баллы за данный вопрос не начисляются.

Если отмечен один ответ и он правильный, за данный вопрос начисляется один балл.

Приложение. Список ответов к вопросам.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1)	2)	2)	3)	1)	1)	3)	2)	2)	1)	1)	2)	2)	3)	2)	3)	2)	2)	1)	3)

21	22	23	24	25
3)	1)	2)	1)	3)

I. Дана матрица  $A$

1...3...2...2...5

2...2...3...2...5

3...1...1...2...2

1...1-1...1...0

- 1) Найти ранг матрицы  $A$
- 2) Указать не менее 2-х базисных миноров матрицы  $A$
- 3) Решить систему однородных уравнений  $Ax=0$

II. Задана система четырех векторов  $a, b, c, d$ .

$a = (2, 1, 3, -1)$ ,  $b = (3, -1, 2, 0)$ ,  $c = (1, 3, 4, -2)$ ,  $d = (4, -3, 1, 1)$ .

- 1) Найти линейно-независимые векторы.
- 2) Остальные векторы выразить через найденные линейно-независимые векторы.

III. Доказать линейную зависимость системы векторов  $a, b, c, d$  где

$a = (2, 1, 11, 2)$

$b = (1, 0, 4, -1)$

$c = (11, 4, 56, 5)$

$d = (2, -1, 5, 6)$

Выделить из нее линейно-независимую подсистему и выразить остальные векторы в виде линейных комбинаций этой линейно-независимой подсистемы

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

IV. Найти матрицу  $B^{-1}$ , обратную к матрице

8.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации.

Форма проведения промежуточной аттестации — экзамен.

### Примерный список вопросов к экзамену

1. Операции над матрицами, детерминант матрицы и его свойства, минор без черты и с чертой, алгебраическое дополнения, формула Лапласа, обратная матрица, матричные уравнения, линейная комбинация строк матрицы, линейная зависимость строк матрицы, ранг матрицы, базисный минор.
2. Ранг произведения матриц.
3. Линейное пространство (примеры), линейная зависимость векторов, базис (примеры), координаты вектора, размерность пространства, изоморфизм, преобразование координат вектора, подпространство и линейная оболочка, прямая сумма пространств.
4. Системы линейных уравнений, классификация линейных уравнений, формула Крамера, фундаментальная система решений, общее решение однородной системы уравнений, свойство решений неоднородной системы уравнений, метод Гаусса.

5. Скалярное произведение, евклидово пространство (примеры).
6. Метод ортогонализации Грамма-Шмидта.
7. Характеристическое уравнение.
8. Метод Лагранжа и метод ортогонального преобразования приведения квадратичной формы к нормальному и каноническому видам.
9. Интерполирующий полином Лагранжа-Сильвестра.
10. Метод нахождения функции от матрицы через минимальный полином в случае различных и совпадающих корней характеристического уравнения.

#### **Перечень теорем:**

- Теорема 1 Лапласа о детерминанте (без доказательства)  
 Теорема 2 О детерминанте произведения матриц  
 Теорема 3 О существовании обратной матрицы  
 Теорема 4 О линейной зависимости строк  
 Теорема 5 О базисном миноре  
 Теорема 6 О детерминанте матрицы равном нулю  
 Теорема 7 О линейной зависимости векторов  
 Теорема 8 О координатах вектора в данном базисе  
 Теорема 9 Об изоморфизме линейных пространств  
 Теорема 10 О прямой сумме линейных пространств  
 Теорема 11 О размерности объединения и пересечения линейных пространств  
 Теорема 12 Кронекера – Капелли  
 Теорема 13 О решения однородной системы уравнений.  
 Теорема 14 О свойстве ортогональной системы векторов  
 Теорема 15 О существовании ортогонального базиса  
 Теорема 16 О сумме размерностей ядра и образа линейного оператора  
 Теорема 17 О собственном векторе линейного оператора  
 Теорема 18 О преобразовании матрицы линейного оператора  
 Теорема 19 О свойствах собственных векторов линейного оператора  
 Теорема 20 О диагонализации матрицы линейного оператора  
 Теорема 21 О сопряженном операторе  
 Теорема 22 О свойствах сопряженного оператора (с.з. и с.в.)  
 Теорема 23 О преобразовании квадратичной формы  
 Теорема 24 О приведении квадратичной формы к каноническому виду.  
 Теорема 25 О законе инерции  
 Теорема 26 Теорема Гамильтона - Кэли.

#### **Демонстрационный вариант контрольной работы**

- 1).  $P(1;5;2)$ ;  $2x - y - z + 11 = 0$ .    2).  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}$ ;  $2x - y + 2z + 9 = 0$ .
- 3).  $\frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ ;  $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-5}$ .    4).  $9x^2 - 6xy + y^2 - \sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y = 0$ .
- 5).  $\frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$ ;  $P(2;-1;3)$ .

Условия заданий: 1) найти расстояние от точки до плоскости и координаты проекции точки на плоскость; 2) найти канонические уравнения проекции прямой на плоскость; 3) найти расстояние между скрещивающимися прямыми и уравнения взаимного перпендикуляра; 4) привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить каноническую систему координат; 5) найти расстояние от точки до прямой и координаты проекции точки на прямую.

### Пример вопросов для собеседования

Объяснить геометрический смысл детерминанта матрицы невырожденного линейного преобразования координат.

Перечислить основные свойства детерминантов на примере матриц размером  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ .

Описать метод решения систем линейных уравнений на основе формул Крамера.

Пояснить сущность метода исключения Гаусса для решения системы линейных уравнений.

Объяснить связь между однозначной разрешимостью квадратной системы линейных уравнений и характером линейного преобразования координат, заданного соответствующей матрицей.

Перечислить свойства матриц поворота в двух и трех измерениях.

Проиллюстрировать коммутативность поворотов в двух измерениях и некоммутативность в трех измерениях.

Объяснить геометрический смысл векторного и смешанного произведения.

Указать способы задания плоскости в пространстве и объяснить связь между ними.

Предложить не менее двух различных способов нахождения координат проекции заданной точки на заданную плоскость.

Перечислить способы задания прямой в пространстве и пояснить связь между ними.

Предложить не менее двух различных способов нахождения уравнений ортогональной проекции прямой, пересекающей заданную плоскость под углом, отличным от прямого.

Указать основные свойства фокальных точек и директрис невырожденной кривой второго порядка.

Описать применение инвариантов кривой второго порядка для получения канонического уравнения кривой.

Для кривой второго порядка пояснить содержание понятия канонической системы координат и методику ее построения.

### Пример тестовых заданий для проверки сформированности компетенций, указанных выше п.3:

Вопросы	Ответы
1 Система неоднородных линейных алгебраических уравнений совместна если	А) ранг основной матрицы на единицу меньше ранга расширенной матрица Б) ранги основной и расширенной матрицы равны В) ранг основной матрицы больше ранга расширенной матрица
2 Матрица линейного оператора приводится к диагональному виду если	А) корнями характеристического уравнения являются различные вещественные числа Б) корнями характеристического уравнения являются различные рациональные числа. В) корнями характеристического уравнения являются как вещественные так и комплексные числа
3 Если система векторов является линейно зависимой, то	А) один из векторов системы будет линейной комбинацией остальных векторов системы Б) нулевая линейная комбинация будет тривиальной В) любой вектор системы будет линейной комбинацией остальных векторов системы
4 Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевое решение если	А) определитель основной матрицы равен нулю Б) ранг основной матрицы меньше числа неизвестных в системе уравнений В) ранг основной матрицы равен числу уравнений в системе уравнений

**Разработчик:**

  
\_\_\_\_\_

доцент кафедры теоретической физики

В.А. Карнаков

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 11.03.04 Электроника и нанoeлектроника.

Программа рассмотрена на заседании кафедры теоретической физики

«24» марта 2025 г.

Протокол №6 Зав. кафедрой



С.В. Ловцов

**Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры разработчика.**