МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)

Институт математики и информационных технологий
Кафедра информационных технологий

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор ИМИТ ИГУ
__________ М. В. Фалалеев
«15» мая 2024 г.

Рабочая программа дисциплины (модуля)

Б1.О.12 Алгебра

Направление подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Направленность (профиль) подготовки Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Квалификация выпускника бакалавр

Форма обучения очная

Иркутск 2024 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели: обеспечение фундаментальной подготовки студентов в одной из важнейших областей современной математики; изучение основ классической и современной алгебры; обучение основным алгебраическим методам решения задач, возникающих в других математических дисциплинах и в практике; знакомство с историей развития алгебры

Задачи:

1) раскрыть роль алгебры в фундаментальной и прикладной математике, сформулировать основные задачи классической и современной алгебры;
2) научить формулировать и излагать теоретические вопросы в общем виде, анализировать накопившийся конкретный материал с общих позиций, создавая основу для введения фундаментальных понятий алгебры;
3) научить основным методам исследования и решения задач.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.12 Алгебра относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.
Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, приобретенные в результате освоения математических дисциплин средней общеобразовательной школы.

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: дискретная математика, математическая логика, геометрия, алгебраические системы, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика, методы вычислений, уравнения математической физики, эконометрика, математическое моделирование, , физика.

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем:
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни;
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен
знать: основные понятия алгебры, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений;
уметь: решать задачи вычислительного и теоретического характера в области алгебры;
владеть: математическим аппаратом уравнений алгебры, методами решения задач и доказательства утверждений в этой области.

4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 9 зачетных ед., 324 час.

Форма промежуточной аттестации: экзамен, экзамен.

4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися			Самост. работа	
		Лекции	Лаб. занятия	Практ. занятия		
Тема 1 Векторно-матричные операции	1	12		12	13	Проверка дом.работы; Сам.работа №1
Тема 2 Определители	1	10		10	13	Проверка дом.работы; Сам.работа №2
Тема 3 Системы линейных уравнений	1	16		16	14	Проверка дом.работы; Сам.работа №3
Тема 4 Линейные векторные пространства и подпространства	2	8		8	14	Проверка дом.работы; Сам.работа №4
Тема 5 Евклидовы и унитарные пространства	2	8		8	13	Проверка дом.работы; Сам.работа №5
Тема 6 Собственные значения, собственные векторы матриц	2	8		8	14	Проверка дом.работы; Сам.работа №6
Тема 7 Квадратичные формы и знакоопределенные матрицы	2	8		8	13	Проверка дом.работы; Сам.работа №7
Итого (1 семестр):		34		34	67	экз.
Итого (2 семестр):		36		36	27	экз.

4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самост. работы
	Вид самост. работы	Сроки выполнения	Затраты времени		
Тема 1 Векторно-матричные операции	Выполнение дом.работы	После изучения темы	16	Проверка дом. работы	Список литературы прилагается

Тема 2 Определители	Выполнение дом.работы	После изучения темы	16	Проверка дом. работы	Список литературы прилагается
Тема 3 Системы линейных уравнений	Выполнение дом.работы	После изучения темы	18	Проверка дом. работы	Список литературы прилагается
Тема 4 Линейные векторные пространства и подпространства	Выполнение дом.работы	После изучения темы	12	Проверка дом. работы	Список литературы прилагается
Тема 5 Евклидовы и унитарные пространства	Выполнение дом.работы	После изучения темы	10	Проверка дом. работы	Список литературы прилагается
Тема 6 Собственные значения, собственные векторы матриц	Выполнение дом.работы	После изучения темы	11	Проверка дом. работы	Список литературы прилагается
Тема 7 Квадратичные формы и знакоопределенные матрицы	Выполнение дом.работы	После изучения темы	11	Проверка дом. работы	Список литературы прилагается
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			94		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)					

4.3. Содержание учебного материала

Тема 1. Векторно-матричные операции.

Векторное пространство R^n: понятие n-мерного вектора; обозначения; пространство R^n; длина вектора; сравнение векторов; арифметические действия с векторами и линейная зависимость; скалярное произведение векторов; расстояние между точками; угол между векторами; неравенства для длин векторов; стандартный базис в R^n; разложение вектора по базису; параметрические уравнения прямой, луча и отрезка.

Линейные функции, уравнения и неравенства: линейные функции векторного аргумента, уравнения и плоскости в R^n; линейные неравенства и полупространства.

Матрицы и матричные операции: понятие матрицы; некоторые специальные матрицы; строчная и столбцевая структура матриц; действия с матрицами.

Тема2. Определители.

Определители матриц 2-го порядка; определители матриц 3-го порядка; общий случай: вычисление определителя матрицы n-мерного порядка.

Теорема о равноправии строк и столбцов определителя.

Свойства определителей.

Практическое вычисление определителей.

Тема3. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений начальные понятия; система линейных уравнений в развернутой форме записи, понятие совместности и решения системы; векторно-матричные формы записи линейных систем; постановка основных вопросов, связанных с линейными системами.

Метод исключения Гаусса: схема метода.

Линейная зависимость и базисы: линейная зависимость векторов: развернутое изложение вопроса; формулировка основной теоремы; базисы и разложение вектора по произвольному базису; критерий существования нетривиальных решений однородной системы; доказательство основной теоремы.

Обратные матрицы: определение, критерий существования и свойства обратной матрицы; формула вычисления обратной матрицы.

Решение систем уравнений с обратимой матрицей: решение с помощью обратной матрицы; решение по формулам Крамера.

Ранг матрицы: определение и теорема о ранге матрицы; методы вычисления ранга матрицы; ранг и условия обратимости матрицы.

Решение произвольных систем линейных уравнений: условие совместности: теорема Кронекера-Капелли; решение совместной системы; матричное представление общего решения; базисные решения.

Тема4. Линейные векторные пространства и подпространства.

Определение линейного пространства (ЛП); примеры. Конечномерные и бесконечномерные ЛП. Линейные комбинации, линейные оболочки и линейно независимые системы векторов ЛП. Базисы конечномерного ЛП (линейная оболочка векторов, на которые натянуто ЛП); размерность ЛП. Подпространства ЛП и линейные (аффинные) многообразия ЛП (сдвиги подпространств). Базисы и размерность подпространств в R^n.

Линейные преобразования (отображения) конечномерных ЛП. Взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями и матрицами.

Тема5. Евклидовы и унитарные пространства.

Скалярное произведение и его свойства. Примеры евклидовых и унитарных пространств. Превращение конечномерного пространства в евклидово (унитарное) пространство. Длина вектора и нормирование вектора. Ортогональные системы векторов и их свойства. Ортогональный базис, ортонормированный базис и их существование: процесс ортогонализации.

Тема6. Собственные значения, собственные векторы матриц

Определение собственного значения матрицы; характеристический полином (многочлен); собственные векторы матрицы. Линейная независимость собственных векторов и диагонализация матриц в случае различных действительных собственных значений.

Связь собственных значений со следом и определителем матрицы. Недиагонализируемые (дефектные) матрицы.

Тема7. Квадратичные формы и знакоопределенные матрицы.

Определение квадратичной формы. Представление с использованием симметричной матрицы и скалярного произведения.

Знакоопределенные квадратичные формы и симметричные матрицы; примеры. Приложения: достаточные условия экстремума второго порядка; критерии выпуклости (вогнутости) функции нескольких переменных. Главные и ведущие (угловые) миноры симметричной матрицы. Критерий знакоопределенности квадратичных форм (в терминах главных миноров).

4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Тема 1 Векторно-матричные операции	11	Сам.работа №1	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 2 Определители	9	Сам.работа №2	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 3 Системы линейных уравнений	14	Сам.работа №3	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 4 Линейные векторные пространства и подпространства	7	Сам.работа №4	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 5 Евклидовы и унитарные пространства	7	Сам.работа №5	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 6 Собственные значения, собственные векторы матриц	7	Сам.работа №6	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 7 Квадратичные формы и знакоопределенные матрицы	7	Сам.работа №7	УК-1 УК-6 ОПК-1

4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Тема 1 Векторно-матричные операции	Домашнее задание	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 2 Определители	Домашнее задание	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 3 Системы линейных уравнений	Домашнее задание	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 4 Линейные векторные пространства и подпространства	Домашнее задание	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 5 Евклидовы и унитарные пространства	Домашнее задание	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 6 Собственные значения, собственные векторы матриц	Домашнее задание	УК-1 УК-6 ОПК-1
Тема 7 Квадратичные формы и знакоопределенные матрицы	Домашнее задание	УК-1 УК-6 ОПК-1

4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

– закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;

– приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;

– формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;

– развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;

– развитие навыков самоорганизации;

– формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

– выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

Подготовка к лекции. Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к практическому занятию. Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к семинарскому занятию. Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к коллоквиуму. Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к контрольной работе. Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

Подготовка к зачету. Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуется делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

Подготовка к экзамену. Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) основная литература:

1. Кремер Н. Ш. Линейная алгебра : учеб. и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, И. М. Тришин ; под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2021. – 422 с. – (Высшее образование) // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/468737. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры : учеб. для вузов / А. Г. Курош. – 22-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 432 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/152647. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).
3. Захарченко В. С. Линейная алгебра. Часть 1 : учеб.пособие / В. С. Захарченко, В. П. Поплевко. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2022. – 121 с.
4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие для вузов / И. В. Проскуряков. – 15-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 476 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/152434. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).
5. Татарников О. В. Линейная алгебра: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / О. В. Татарников, А. С. Чуйко, В. Г. Шершнев ; под общ. Ред. О. В. Татарникова. – Москва : Юрайт, 2021. – 334 с. – (Бакалавр. Прикладной курс) // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/482664. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).
6. Фаддеев Д. К. Задачи по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. – 288 с. // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/167703. – Режим доступа: для авториз. пользователей (подписка ИГУ).
7. Аргучинцев А.В. Линейное программирование: практикум / А.В.Аргучинцев, А.И.Бе-ников. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2011. – 73 с. (50 экз.)
8. Беников А.И. Линейное программирование: Учеб. пособие / А.И. Беников. – Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 2005. – 148 с. (50 экз.)

б) дополнительная литература:

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

1. http://educa.isu.ru
2. http://window.edu.ru
3. http://math.ru
4. http://www.exponenta.ru

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

6.2. Программное обеспечение

“MS Office”

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции
Проверка домашней работы	тема1, тема2, тема3, тема4, тема5, тема6, тема7, тема8, тема9, тема10	УК-1 УК-6 ОПК-1
Сам.работа	тема1, тема2, тема3, тема4, тема5, тема6, тема7, тема8, тема9, тема10	УК-1 УК-6 ОПК-1

Примеры оценочных средств текущего контроля

1. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №1

1. Даны векторы a=(6;0;8), b=(0;1), c=(1;3;2), u=(4;3), v=(-1;3;0). Найти те из следующих векторов, которые имеют смысл: a+2b; a-c; u+2b; a-(c+v); 2(b+u)-a; 3a-4c.
2. Вычислить длину векторов из упр. №1 и следующие скалярные произведения: $\langle a,b\rangle$, $\langle a,c\rangle$, $\langle v,a\rangle$, $\langle a,c+2v\rangle$, $\langle 4a+3c,v\rangle$, $\langle a+v,c-2a\rangle$, $\langle 5a+2b,2b-c-5a\rangle$
3. Определить линейно зависимые и линейно независимые наборы векторов. В случае линейной зависимости указать коэффициенты нулевой линейной комбинации. а) x=(2;1), y=(1;2); б) x=(2;1), y=(1;2), z=(4;4);
в) x=(1;1;0), y=(0;1;1), z=(1;0;1); г) x=(1;0;0), y=(0;0;0).
4. Записать разложение векторов в стандартных базисах соответствующих пространств: $x=(2;0;1)$,
$y=(3;0;0)$, $z=(2;1)$, $a=(2;0;0;5)$, $b=(1;3;-2;-5)$.
5. Записать параметрические уравнения прямых, проходящих через точку a в направлении вектора h :
а) $a=(2;-1)$, $h=(1;3)$;б) $a=(-3;0;2)$, $h=(2;1;-1)$; в) $a=(2;-1;1;1)$, $h=(1;2;-2;3)$.
6. Составить уравнение плоскости, проведенной через точку A(2;5;-4) параллельно плоскости X_1OX_2.
7. Построить полупространства в R^2 , соответствующие следующим линейным неравенствам:

а) $3x_1+2x_2\geq 6$;б) $3x_1-2x_2\geq 6$;в) $2x_1-x_2\geq -2$; г) $-3x_1+x_2\geq 6$; д) $-2x_1+5x_2\leq 0$.

8. Даны матрицы: $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}$. Найти след матрицы $C=AB-BA+A+B$.

9. Вычислить матрицу $D=(AB)^T-C^2$, где $A=\begin{pmatrix}3&4&2\\1&0&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\\0&5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix}$.

10. Решить уравнение $4A-3E+2X=0$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

11. Найти порядок (размерность), который должна иметь матрица B, чтобы матрица $A^T \cdot B$ была квадратной, если матрица A имеет порядок 3×4.

2. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №2

Вычислить определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 10 & 10 \\ 12 & 36 & 40 & 41 \end{vmatrix}$$

3. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №3

1) Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

2) Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение системы уравнений

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0;$$

3) Вычислить ранг матриц и указать один базисный минор.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №4

1)Найти базис и размерность линейной оболочки $Lin\{a^1, a^2, a^3, a^4\}$:

$a^1 = (2;1;3;1)$, $a^2 = (1;2;0;1)$, $a^3 = (-1;1;-3;0)$, $a^4 = (3;3;3;2)$.

2) В линейном пространстве две системы векторов $a = (a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, b_2, b_3)$ заданы своими координатами:

$$a_1 = (-1; 3; -4), \quad a_2 = (1; -1; 1), \quad a_3 = (1; 1; -1);$$

$$b_1 = (1; 1; 1), \quad b_2 = (1; 0; -1), \quad b_3 = (1; 1; 0).$$

Докажите, что эти системы являются базисами. Найдите: а) матрицу перехода от базиса **a** к базису **b**; б) матрицу обратного перехода от базиса **b** к базису **a**; в) координаты вектора b_2 в обоих базисах; г) координаты вектора $x = -3a_1 - 5a_2 - 2a_3$ в базисе **b.**

5. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №5

1) Найти размерность и ортогональный базис подпространства $L = Lin(a_1, a_2, a_3, a_4)$, где

$a_1 = (1; 0; 1; -1; 2)$, $a_2 = (1; 0; 1; -1; -2)$, $a_3 = (1; 0; 3; 0; 0)$, $a_4 = (0; 0; 2; 1; 6)$.

2) При каком значении λ базис, образованный векторами $g_1 = \lambda e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $g_2 = e_1 + \lambda e_2 + e_3 + e_4$, $g_3 = e_1 + e_2 + \lambda e_3 + e_4$, $g_4 = e_1 + e_2 + e_3 + \lambda e_4$, является ортогональным? Нормировать этот базис.

6. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №6

1) Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы. Можно ли привести матрицу к диагональному виду?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Демонстрационный вариант самостоятельной работы №7

1) Определить, является ли квадратичная форма знакоопределенной:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2.$$

2) Определить знак квадратичной формы:

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2, \quad X \subset R^2.$$

$$f(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_2, \quad X \subset R^2.$$

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2, \quad X \subset R^3.$$

7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Список вопросов для промежуточной аттестации:

Вопросы к экзамену.

1. Векторы. Линейные операции над векторами.
2. Понятие базиса. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме.
3. Скалярное произведение двух векторов. Координатная запись.
4. Общее уравнение прямой линии на плоскости.
7. Параметрические уравнения прямой линии.
8. Угол между прямыми линиями на плоскости, его вычисление.
9. Стандартный базис в R^n. Разложение вектора по базису.
10. Линейные функции, уравнения и неравенства.
11. Матрицы и матричные операции: понятие матрицы.
12. Действия с матрицами.
13. Определители матриц 2-го порядка; определители матриц 3-го порядка.
14. Вычисление определителя матрицы n-мерного порядка.
15. Теорема о равноправии строк и столбцов определителя.
16. Свойства определителей.
17. Система линейных уравнений в развернутой форме записи, понятие совместности и решения системы.
18. Векторно-матричные формы записи линейных систем.
19. Метод исключения Гаусса: схема метода.
20. Линейная зависимость векторов.
21. Базисы и разложение вектора по произвольному базису.
22. Критерий существования нетривиальных решений однородной системы.
23. Обратные матрицы: определение, критерий существования и свойства обратной матрицы.
24. Формула вычисления обратной матрицы.
25. Решение систем уравнений с обратимой матрицей.
26. Решение по формулам Крамера.
27. Ранг матрицы: определение и теорема о ранге матрицы.
28. Методы вычисления ранга матрицы.
29. Ранг и условия обратимости матрицы.
30. Теорема Кронекера-Капелли.
31. Определение собственного значения матрицы; характеристический полином (многочлен); собственные векторы матрицы.

32. Линейная независимость собственных векторов и диагонализация матриц.

33. Связь собственных значений со следом и определителем матрицы.

34. Недиагонализируемые (дефектные) матрицы.

35. Определение квадратичной формы. Представление с использованием симметричной матрицы и скалярного произведения.

36. Знакоопределенные квадратичные формы и симметричные матрицы; примеры.

37. Главные и ведущие (угловые) миноры симметричной матрицы.

38. Критерий знакоопределенности квадратичных форм (в терминах главных миноров).

Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:

1. Демонстрационный вариант экзаменационного билета №1

1) Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

2) Вычислить ранг матрицы, приводя ее к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

3) Обратные матрицы: определение, критерий существования и свойства обратной матрицы.

2. Демонстрационный вариант экзаменационного билета №2

1) Ранг матрицы: определение и теорема о ранге матрицы (с док-вом).

2) Решить систему, указать все наборы неизвестных, которые могут быть «свободными»

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

Если система совместна, указать какое–нибудь частное решение.

3) Решить уравнение $4Y - 5E = 2B^T$, где $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Демонстрационный вариант экзаменационного билета №3

1) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы. Можно ли привести матрицу к диагональному виду?

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Вычислить матрицу $D=(AB)^T-C^2$, где $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

3) Теорема Кронекера-Капелли.

Разработчик: Захарченко В.С., канд.физ.-мат.наук, доцент кафедры вычислительной математики и оптимизации.