



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

Институт математики и информационных технологий
Кафедра вычислительной математики и оптимизации



Рабочая программа дисциплины (модуля)

Б1.О.11 Элементы теории игр и исследования операций

Направление подготовки	01.04.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) подготовки	Цифровая бизнес-аналитика
Квалификация выпускника	магистр
Форма обучения	очная

Иркутск 2024 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели: формирование знаний об основных элементах математической теории конфликтных ситуаций, получение навыков по использованию математических и программных методов решения задач теории игр, оптимизации систем методами динамического программирования.

Задачи:

- знакомство с основными концепциями математической теории игр через реальные игровые ситуации;
- развитие логико-математического и теоретико-игрового мышления, навыков математического исследования явлений и процессов, связанных с профессиональной деятельностью;
- овладение техникой принятия математически обоснованных решений в конфликтных ситуациях
- овладение методами динамического программирования оптимизации сложных систем.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.12 Элементы теории игр и исследования операций относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами:

Б1.О.06 Математические методы принятия решений;

Б1.В.01 Моделирование процессов управления в технических системах.

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной:

Б1.О.10 Большие данные;

Б2.В.01(П) Научно-исследовательская работа;

Б2.О.03(П) Технологическая (проектно-технологическая) практика;

Б2.О.01(Пд) Преддипломная практика;

Б3.01 Выполнение и защита выпускной квалификационной работы.

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика:

ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики;

ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач;

ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен знать:

- общие понятия исследования операций: модель, оперирующая сторона, стратегии и их эффективность, неконтролируемые фактора и их классификация;

- основные понятия математической теории игр;
- формы представления игр;
- основные игровые методы, стратегии и модели;
- понятия равновесия и оптимальности в играх;
- принцип оптимальности Беллмана, условия и способы его применения для решения задач динамического программирования;

уметь:

- классифицировать игровые ситуации;
- формулировать цели и стратегии игроков;
- оценивать эффективность стратегий;
- находить равновесные профили стратегий;
- анализировать информацию, которой обладают игроки;
- строить модель игры, соответствующую рассматриваемой задаче;
- рассчитывать игровые модели (как аналитически, так и с помощью компьютера) и анализировать результаты моделирования;
- решать методами динамического программирования задач оптимизации на сетях и графах, задачи оптимального инвестирования и замены оборудования

владеть:

- методикой построения, анализа и применения математических моделей для задач принятия решений в конфликтных ситуациях;
- навыками подготовки обоснованных решений игровых задач;
- методом динамического программирования для решения прикладных оптимизационных задач.

4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 5 зачетных ед., 180 час.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Самост. работа	Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися					
		Лекции	Лаб. занятия	Практ. занятия			
Тема 1. Введение в исследование операций	3	4		4	6	Индивидуальные задания. Контрольная работа.	
Тема 2. Антагонистические игры и игры с природой.	3	14		14	32	Индивидуальные задания. Контрольная работа.	
Тема 3. Элементы теории бескоалиционных игр.	3	6		6	16	Индивидуальные задания. Контрольная работа. Коллоквиум.	
Тема 4. Элементы динамического программирования.	3	6		6	21	Индивидуальные задания. Контрольная работа. Деловая игра.	
Итого (3 семестр):	3	30		30	75	экз.	

4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самост. работы
	Вид самост. работы	Сроки выполнения	Затраты времени		

Тема 1	Составление письменного конспекта ответов.	1-2 недели учебного года	6 часов	Дистанционная оценка индивидуальных ответов и компьютерных программ преподавателем на портале educa.isu.ru	ОЛ*: 1, 2, 3 ДЛ**: 1, 2
Тема 2	Составление письменного конспекта ответов. Индивидуальная подготовка и тестирование компьютерной программы.	3-9 недели учебного года	32 часа	Дистанционная оценка индивидуальных ответов и компьютерных программ преподавателем на портале educa.isu.ru	ОЛ: 1, 2, 3, 4, 5 ДЛ: 1, 3
Тема 3	Составление письменного конспекта ответов. Подготовка компьютерных презентаций. Доклад.	10-12 недели учебного года	16 часов	Дистанционная оценка индивидуальных ответов и компьютерных программ преподавателем на портале educa.isu.ru Презентация.	ОЛ: 3, 4, 5 ДЛ: 1, 3
Тема 4	Составление письменного конспекта ответов. Индивидуальная подготовка и тестирование компьютерной программы.	13-15 недели учебного года	21 час	Дистанционная оценка индивидуальных ответов и компьютерных программ преподавателем на портале educa.isu.ru Деловая игра.	ОЛ: 4 ДЛ: 1
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			75		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)			72		

*ОЛ – основная литература

** ДЛ – дополнительная литература

4.3. Содержание учебного материала

Тема 1. Задачи исследования операций. Понятие модели и операции. Принятие решений в условиях неопределенности. Классификация неконтролируемых факторов. Оценка эффективности стратегий.

Тема 2. Общие антагонистические игры. Седловые точки и наилучшие гарантированные результаты. Наилучший гарантированный подход. Понятие о матричных играх. Решение матричных игр в чистых стратегиях. Смешанное расширение матричных игр. Две интерпретации смешанного расширения матричных игр. Свойства смешанного расширения матричных игр. Доминирование стратегий. Матричные игры и линейное программирование. Принятие решений в конечных играх в условиях неопределенности (игры с природой). Максиминный критерий Вальда, критерии минимаксного риска Сэвиджа, крайнего оптимизма, пессимизма-оптимизма Гурвица, вероятностные критерии.

Тема 3. Понятие о бескоалиционных играх. Оптимальность в бескоалиционных играх: равновесие по Нэшу. Определение биматричных игр. Поиск ситуаций равновесия в общих бескоалиционных играх. Смешанное расширение биматричных игр. Теорема Никайдо-Исоды и ее применение в биматричных играх. Планирование выпуска продукции в условиях неантагонистической конкуренции. Модель экологического конфликта.

Тема 4. Введение в динамическое программирование. Принцип оптимальности Беллмана и условия его применимости. Применение метода динамического программирования для поиска оптимальных маршрутов и решения задач оптимизации на сетях и графах. Решения задач оптимального инвестирования и замены оборудования с помощью подходов динамического программирования.

4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Тема 1	4	Индивидуальные задания. Контрольная работа.	ОПК-1,
Тема 2	14	Индивидуальные задания. Контрольная работа.	ОПК-1, ОПК-3
Тема 3	6	Индивидуальные задания. Контрольная работа. Коллоквиум.	ОПК-1, ОПК-3
Тема 4	6	Индивидуальные задания. Контрольная работа. Деловая игра.	ОПК-1, ОПК-2

4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Тема 1	Эпсилон-оптимальные стратегии и их свойства.	ОПК-1,

Тема 2	Свойство прямоугольности множества седловых точек в произвольной антагонистической игре. Теоремы о сокращении размерности матричной игры в случае наличия между столбцами матрицы отношения доминирования и отношения строгого доминирования.	ОПК-1, ОПК-3
Тема 3	Реализация с помощью пакета Scilab метода решения задачи квадратичного программирования для поиска равновесных по Нэшу ситуаций в смешанном расширении биматричной игры.	ОПК-1, ОПК-3
Тема 4	Применение метода динамического программирования в задаче о замене оборудования.	ОПК-1, ОПК-2

4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

- закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;
- приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
- формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
- развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;
- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

Подготовка к лекции. Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к практическому занятию. Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с

помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к семинарскому занятию. Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к коллоквиуму. Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к контрольной работе. Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

Подготовка к зачету. Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной

преподавателем литературе. Рекомендуется делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

Подготовка к экзамену. Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) основная литература:

1. Исследование операций в экономике: учебник для вузов / под редакцией Н. Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2022. – 414 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/488643> (дата обращения: 20.05.2022).
2. Луценко, М. М. Теория игр: учебное пособие / М. М. Луценко, А. М. Дёмин. – СПб: ПГУПС, 2018. – 71 с. – ISBN 978-5-7641-1129-2. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/111726> (дата обращения: 20.05.2022).
3. Набатова, Д. С. Математические и инструментальные методы поддержки принятия решений: учебник и практикум для вузов / Д. С. Набатова. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 292 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/4893035> (дата обращения: 20.05.2022).
4. Шагин, В. Л. Теория игр: учебник и практикум / В. Л. Шагин. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 223 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/469243> (дата обращения: 20.05.2022).
6. Шиловская, Н. А. Теория игр: учебник и практикум для вузов / Н. А. Шиловская. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 318 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/490360> (дата обращения: 20.05.2022).

б) дополнительная литература:

1. Васин, А. А. Исследование операций: учеб. пособие / А. А. Васин, П. С. Краснощеков, В. В. Морозов. – М.: Академия, 2008. – 464 с.
2. Колбин, В. В. Методы принятия решений: учебное пособие / В. В. Колбин. – СПб: Лань, 2021. – 644 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – <https://e.lanbook.com/book/167176> (дата обращения: 20.05.2022).
3. Мазалов, В. В. Математическая теория игр и приложения: учебное пособие для вузов / В. В. Мазалов. – СПб: Лань, 2021. – 500 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/153917> (дата обращения: 22.05.2022).

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

6.2. Программное обеспечение

1. Офисный пакет Microsoft Office с программой подготовки презентаций Microsoft PowerPoint.
2. Пакет Scilab для математических вычислений (открытое программное обеспечение).

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции
Индивидуальные задания	Темы 1, 2, 3, 4	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Контрольная работа	Темы 1, 2, 3, 4	ОПК-1, ОПК-2,
Деловая игра	Тема 4	ОПК-1, ОПК-2
Доклады	Тема 3	ОПК-1, ОПК-3
Коллоквиум	Тема 3	ОПК-1, ОПК-3

Примеры оценочных средств текущего контроля

Демонстрационный вариант индивидуального задания по теме 2.

Матричная игра задана матрицей

$b - a$	b	$2b$
$2b$	$b - 1$	$-a$

Здесь a – количество букв в Вашем имени, b – количество букв в Вашей фамилии.

- а) Найти решение, при необходимости перейдя к смешанным стратегиям и составив пару задач линейного программирования.
- б) Результат проверить с помощью критерия оптимальности стратегий в смешанном расширении матричной игры.

Демонстрационный вариант контрольной работы по теме 3.

Биматричная игра задана матрицами:

И=

b	1	2	$b - a$
$a + b$	4	$b - a + 1$	$a - b$
a	2	1	6

a	8	7	$b - 2a$
2	4	1	b
b	3	a	4

Здесь a – количество букв в Вашем имени, b – количество букв в Вашей фамилии.

- 1) Найти ситуации, равновесные по Нэшу, или убедиться в их отсутствии.
- 2) Найти ситуации, оптимальные по Парето.
- 3) Найти ситуации, оптимальные по Слейтеру.
- 4) Определить, какие стратегии нужно использовать каждому из игроков, исходя из принципа наилучшего гарантированного результата.

Все вычисления проводить в чистых стратегиях. К смешанным расширениям не переходить.

7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Список вопросов для промежуточной аттестации:

1. Основные элементы модели операции. Классификация неконтролируемых факторов.
2. Определения абсолютно-оптимальной и оптимальной (оптимальной гарантирующей) стратегий. Связь и различие между этими понятиями (с доказательством соответствующего утверждения).
3. Определения эpsilon-абсолютно-оптимальной и эpsilon-оптимальной стратегий. Всегда ли существуют абсолютно оптимальные стратегии? оптимальные стратегии? эpsilon-абсолютно-оптимальные стратегии? эpsilon-оптимальные стратегии?
4. Определение седловой точки в антагонистической игре. Теорема о существовании ситуаций равновесия в выпукло-непрерывных играх.
5. Определение и смысл матричной игры двух лиц. Существование решения в чистых стратегиях. Определение и смысл смешанного расширения матричной игры. Физическая смесь стратегий.
6. Доказательство утверждения о том, что если в матричной игре существуют оптимальные чистые стратегии, то соответствующие стратегии являются оптимальными и в смешанном расширении матричной игры.
7. Критерий оптимальности стратегий в смешанном расширении матричной игры (формулировка и доказательство).
8. Предположим, что в матричной игре, заданной матрицей H , все элементы матрицы изменены на некоторую одну и ту же константу K . Как изменятся множества оптимальных стратегий игроков и значение игры? (Доказать соответствующее утверждение).
9. Предположим, что в матричной игре, заданной матрицей H , все элементы матрицы умножены на некоторую одну и ту же константу $K > 0$. Как изменятся множества оптимальных стратегий игроков и значение игры? (Доказать соответствующее утверждение).
10. Условия дополняющей нежесткости в матричной игре (формулировка и доказательство).
11. Доминирование стратегий. Теоремы о сокращении размерности матричных игр при наличии доминирующих строк или столбцов.
12. Доказательство утверждения о том, что в игре с кососимметрической матрицей значение игры равно нулю, а множества оптимальных стратегий игроков совпадают.
13. Сведение задачи поиска оптимальных стратегий игроков в смешанном расширении матричной игры к паре взаимно-двойственных задач линейного программирования.

14. Игры с природой. Критерии Вальда, крайнего оптимизма, пессимизма-оптимизма Гурвица.
15. Понятие риска в игре с природой. Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Вероятностные критерии в играх с природой. Принцип недостаточного основания Лапласа.
16. Бескоалиционные игры: определение, приемлемые и равновесные ситуации. Стратегически эквивалентные игры.
17. Теорема Никайдо-Исоды и следствия из нее.
18. Понятие о смешанном расширении бескоалиционных игр. Теорема Нэша (формулировка).
19. Ситуации, оптимальные по Парето в бескоалиционных играх.
20. Биматричные игры. Определение. Ситуации равновесия в чистых стратегиях. Смешанные расширения биматричных игр. Критерий равновесности ситуации в смешанном расширении биматричной игры.
21. Биматричные игры и задачи нелинейного программирования.
22. Решение биматричных игр с помощью теоремы Никайдо-Исоды.
23. Метод динамического программирования. Принцип Беллмана и условия его применимости.
24. Применение метода динамического программирования для поиска оптимальных маршрутов и решения задач оптимизации на сетях и графах.
25. Решения задач оптимального инвестирования и замены оборудования с помощью подходов динамического программирования

Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:

Демонстрационный вариант экзаменационного билета.

1. Доказать следующее утверждение. Пусть тройка $\{x^*, y^*, v_*\}, x^* \in X, y^* \in Y, v_* \in \mathbb{R}^1$ является решением в смешанном расширении матричной игры, заданной матрицей $H = [h_{ij}], i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$. Если все элементы матрицы H изменить на одну и ту же константу $C \in \mathbb{R}^1$, то в смешанном расширении матричной игры, определяемом матрицей $H = [h_{ij} + C]$, стратегии x^*, y^* по-прежнему будут образовывать ситуацию равновесия, а цена игры изменится на эту константу C , то есть станет равной $v_* + C$.

2. Урожайность каждого из сортов пшеницы (номера строк) зависит от состояния погоды (номера столбцов) и задана матрицей:

30	29	29,5	28
29	30	29,5	32
29,3	29,4	29,1	30

Выяснить, какой из сортов пшеницы предпочтительнее, используя критерии Гурвица ($\lambda = 1/2$), Сэвиджа и Лапласа (вероятности наступления экономических ситуаций оценены соответственно как $1/4, 1/4, 1/3$ и $1/6$).

3. Дана биматричная игра:

$$H = \begin{array}{|ccc|} \hline 0 & -4 & 2 \\ \hline 3 & -5 & 0 \\ \hline -1 & 4 & 7 \\ \hline \end{array} \quad G = \begin{array}{|ccc|} \hline 4 & 4 & 4 \\ \hline -2 & 4 & 1 \\ \hline 3 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

Найти ситуации равновесия в чистых стратегиях, если они существуют.

3. Решить методом динамического программирования следующую задачу.

Предположим, что рассматривается вопрос об инвестициях в 3 различные фирмы средств суммарным объемом 50 млн рублей. При этом в каждую фирму могут быть инвестированы средства, кратные 10 млн руб. В таблице приведены данные по ожидаемому росту доходов в зависимости от объемов инвестиций (в абсолютных величинах). Здесь, конечно, существенна нелинейная зависимость прироста дохода от величины вкладываемых средств. Требуется найти оптимальное распределение инвестиций между фирмами, при котором суммарный прирост дохода будет наибольшим.

Объем инвестиций x (млн руб.)	Прирост дохода		
	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0
10	3	6	4
20	5	8	5
30	9	9	11
40	11	15	12
50	17	19	18

Разработчик: Аргучинцев Александр Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и оптимизации.