



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

Институт математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений



Рабочая программа дисциплины (модуля)

Б1.О.04 Дифференциальные уравнения в частных производных

Направление подготовки	01.04.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) подготовки	Математическое моделирование
Квалификация выпускника	магистр
Форма обучения	очная

Иркутск 2025 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели: Формирование у будущих магистров способностей решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики; совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач; разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности.

Задачи: Изучить с отдельными доказательствами основные положения теории уравнений с частными производными. Дать обзор основных задач для уравнений математической физики; сформировать умение создавать математическую модель физического явления; научить студентов применять набор стандартных методов решения задач для уравнений с частными.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Учебная дисциплина Б1.О.04 Дифференциальные уравнения в частных производных относится к обязательной части Блока 1 образовательной программы.

Для изучения данной учебной дисциплины необходимы знания, умения и навыки, формируемые предшествующими дисциплинами: математический анализ, дифференциальные уравнения, линейная алгебра, аналитическая геометрия, функциональный анализ.

Перечень последующих учебных дисциплин, для которых необходимы знания, умения и навыки, формируемые данной учебной дисциплиной: численные методы решений уравнений в частных производных, НИР, математические методы принятия решений.

3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и ОП ВО по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика:

ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики;

ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач;

ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

знать: классификацию уравнений с частными производными. Постановку классических задач для уравнений с частными производными;

уметь: приводить уравнения с частными производными к каноническому виду; решать классические задачи для уравнений математической физики;

владеть: навыками моделирования практических задач с дифференциальными уравнениями; языком предметной области.

4. СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 6 зачетных ед., 216 час.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

4.1. Содержание дисциплины, структурированное по темам, с указанием видов учебных занятий и отведенного на них количества академических часов

Раздел дисциплины / тема	Сем.	Виды учебной работы				Формы текущего контроля; Формы промежут. аттестации
		Контактная работа преподавателя с обучающимися			Сам ост. рабо та	
		Лекции и	Лаб. заняти я	Практ. заняти я		
Раздел 1. Тема 1.1	1	1			3	опрос; экз
Раздел 1. Тема 1.2	1	2			5	опрос; экз
Раздел 1. Тема 1.3	1	1		2	6	КР 1; экз
Раздел 1. Тема 1.4	1	1		4	7	КР 2, 3; экз
Раздел 1. Тема 1.5	1	2			4	опрос; экз
Раздел 2. Тема 2.1	1	1		1	4	КР 4; экз.
Раздел 2. Тема 2.2	1	1		1	4	КР 5; экз.
Раздел 2. Тема 2.3	1	2			4	опрос; экз
Раздел 2. Тема 2.4	1	1		2	4	опрос; экз
Раздел 2. Тема 2.5	1	1		2	6	опрос; экз
Раздел 2. Тема 2.6	1	2			6	опрос; экз
Раздел 3. Тема 3.1	1	2			4	опрос; экз
Раздел 3. Тема 3.2	1	1		2	6	опрос; экз
Раздел 3. Тема 3.3	1	1		2	4	КР 6; экз.
Раздел 3. Тема 3.4	1	1		2	6	опрос; экз
Раздел 4. Тема 4.1	1	1		2	8	КР 7; экз
Раздел 4. Тема 4.2	1	2			4	опрос; экз
Раздел 4. Тема 4.3	1	1		2	6	КР 8; экз
Раздел 4. Тема 4.4	1	1		2	4	КР 8; экз
Раздел 5. Тема 5.1	1	1		3	6	опрос; экз
Раздел 5. Тема 5.2	1	2		3	4	опрос; экз
Раздел 6. Тема 6.1	1	1			3	опрос; экз
Раздел 6. Тема 6.2	1	1			3	опрос; экз
Итого (1 семестр):		30		30	111	экз.

4.2. План внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Раздел дисциплины / тема	Самостоятельная работа обучающихся			Оценочное средство	Учебно-методическое обеспечение самост. работы
	Вид самост. работы	Сроки выполнения	Затраты времени		

Раздел 1. Тема 1.1-1.5	реферат	1 -3 неделя (1семестр)	25	КР 1, 2, 3	[1 - 10]
Раздел 2. Тема 2.1-2.6	реферат	4-6 неделя (1семестр)	28	КР 4, 5	[1 - 10]
Раздел 3. Тема 3.1-3.4	реферат	7-9 неделя (1семестр)	20	КР 6	[1 - 10]
Раздел 4. Тема 4.1-4.4	реферат	10-12 неделя (1семестр)	22	КР 7	[1 - 10]
Раздел 5. Тема 5.1-5.2	реферат	13 неделя (1семестр)	10	опрос	[1 - 10]
Раздел 6. Тема 6.1-6.2	реферат	14 неделя (1семестр)	6	опрос	[1 - 10]
Общая трудоемкость самостоятельной работы (час.)			111		
Из них с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий (час.)					

4.3. Содержание учебного материала

Раздел 1. Введение.

Тема 1.1. Понятие об уравнениях с частными производными. Виды уравнений. Дифференциальные с частными производными первого и второго порядков.

Тема 1.2. Вывод уравнений колебаний струны, теплопроводности, Лапласа, постановка краевых задач, их физическая интерпретация.

Тема 1.3. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Гиперболические, параболические и эллиптические уравнения. О постановке задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Корректная постановка задач. Примеры корректно поставленных задач. Пример Адамара некорректно поставленной задачи Коши для эллиптических уравнений.

Тема 1.4. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений с частными производными. Понятие о характеристиках дифференциальных уравнений с частными производными. Связь характеристических направлений с характеристиками.

Тема 1.5. Системы уравнений с частными производными. Задача Коши. Теорема Коши – Ковалевской.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Уравнения гиперболического типа.

Тема 2.1. Волновое уравнение. Задача Коши для уравнения колебаний. Формула Даламбера.

Тема 2.2. Метод Дюамеля для решения задачи Коши в случае неоднородного волнового уравнения.

Тема 2.3. Вывод формулы Кирхгофа и Пуассона, исследование этих формул. Принцип Гюйгенса. Существование, единственность и непрерывная зависимость решений задач от начальных данных. Понятие обобщенного решения.

Тема 2.4. Задачи Гурса и Дарбу.

Тема 2.5. Решение однородной смешанной задачи для уравнений гиперболического типа. Собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля. Общая схема метода Фурье.

Тема 2.6. Применение метода Фурье для неоднородных смешанных задач для уравнений гиперболического типа.

Раздел 3. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Уравнения эллиптического типа и теория потенциалов.

Тема 3.1. Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка основных краевых задач.

Тема 3.2. Формулы Грина. Гармонические функции и их свойства. Принцип максимума. Теоремы Лиувилля и Горнака. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Тема 3.3. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре и полупространстве. Метод Фурье для решения внутренней и внешней задач Дирихле для уравнения Лапласа в круге, кольце, прямоугольнике.

Тема 3.4. Теория потенциала и сведение краевых задач для уравнений эллиптического типа к интегральным уравнениям.

Раздел 4. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Уравнения параболического типа.

Тема 4.1. Уравнение теплопроводности. Постановка краевых задач. Фундаментальное решение. Уравнение конвективной диффузии.

Тема 4.2. Принцип максимума в ограниченной области и решение задачи Коши, теоремы единственности и устойчивости.

Тема 4.3. Решение однородной смешанной задачи для уравнений гиперболического типа. Общая схема метода Фурье.

Тема 4.4. Применение метода Фурье для неоднородных смешанных задач для уравнений параболического типа.

Раздел 5. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка.

Тема 5.1. Классификация дифференциальных уравнений первого порядка. Метод характеристик.

Тема 5.2 Системы дифференциальных уравнений первого порядка, их классификация и способы аналитического решения.

Раздел 6. Обобщенные функции

Тема 6.1. Функция Дирака (определения, характеристики., область применения).

Тема 6.2. Функция Хевисайда (определения, характеристики., область применения).

4.3.1. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

Тема занятия	Всего часов	Оценочные средства	Формируемые компетенции
Раздел 1. Тема 1.3	2	КР 1	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 1. Тема 1.4	4	КР 2, 3	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 2. Тема 2.1	1	КР 4	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 2. Тема 2.2	1	КР 5.	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 2. Тема 2.4	2	опрос	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 2. Тема 2.5	2	опрос	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 3. Тема 3.2	2	опрос	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 3. Тема 3.3	2	КР 6	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 3. Тема 3.4	2	опрос	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 4. Тема 4.1	2	КР 7	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 4. Тема 4.3	2	КР 8	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 4. Тема 4.4	2	КР 8	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 5. Тема 5.1	3	опрос	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Раздел 5. Тема 5.2	3	опрос	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

4.3.2. Перечень тем (вопросов), выносимых на самостоятельное изучение студентами в рамках самостоятельной работы

Тема	Задание	Формируемые компетенции
Тема 6.1	Реферат	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
Тема 6.2	реферат	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

4.4. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа студентов всех форм и видов обучения является одним из обязательных видов образовательной деятельности, обеспечивающей реализацию требований Федеральных государственных стандартов высшего образования. Согласно требованиям нормативных документов самостоятельная работа студентов является обязательным компонентом образовательного процесса, так как она обеспечивает закрепление получаемых на лекционных занятиях знаний путем приобретения навыков осмысления и расширения их содержания, навыков решения актуальных проблем формирования общекультурных и профессиональных компетенций, научно-исследовательской деятельности, подготовки к семинарам, лабораторным работам, сдаче зачетов и экзаменов. Самостоятельная работа студентов представляет собой совокупность аудиторных и внеаудиторных занятий и работ. Самостоятельная работа в рамках образовательного процесса в вузе решает следующие задачи:

- закрепление и расширение знаний, умений, полученных студентами во время аудиторных и внеаудиторных занятий, превращение их в стереотипы умственной и физической деятельности;
- приобретение дополнительных знаний и навыков по дисциплинам учебного плана;
- формирование и развитие знаний и навыков, связанных с научно-исследовательской деятельностью;
- развитие ориентации и установки на качественное освоение образовательной программы;
- развитие навыков самоорганизации;
- формирование самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной теоретической, практической и учебно-исследовательской деятельности.

Подготовка к лекции. Качество освоения содержания конкретной дисциплины прямо зависит от того, насколько студент сам, без внешнего принуждения формирует у себя установку на получение на лекциях новых знаний, дополняющих уже имеющиеся по данной дисциплине. Время на подготовку студентов к двухчасовой лекции по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к практическому занятию. Подготовка к практическому занятию включает следующие элементы самостоятельной деятельности: четкое представление цели и задач его проведения; выделение навыков умственной, аналитической, научной деятельности, которые станут результатом предстоящей работы. Выработка навыков осуществляется с помощью получения новой информации об изучаемых процессах и с помощью знания о том, в какой степени в данное время студент владеет методами исследовательской деятельности, которыми он станет пользоваться на практическом занятии. Подготовка к практическому занятию нередко требует подбора материала, данных и специальных источников, с которыми предстоит учебная работа. Студенты должны дома подготовить к занятию 3–4 примера формулировки темы исследования, представленного в монографиях, научных статьях, отчетах. Затем они самостоятельно осуществляют поиск соответствующих источников, определяют актуальность конкретного исследования процессов и явлений, выделяют основные способы доказательства авторами научных работ ценности того, чем они занимаются. В ходе

самого практического занятия студенты сначала представляют найденные ими варианты формулировки актуальности исследования, обсуждают их и обосновывают свое мнение о наилучшем варианте. Время на подготовку к практическому занятию по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к семинарскому занятию. Самостоятельная подготовка к семинару направлена: на развитие способности к чтению научной и иной литературы; на поиск дополнительной информации, позволяющей глубже разобраться в некоторых вопросах; на выделение при работе с разными источниками необходимой информации, которая требуется для полного ответа на вопросы плана семинарского занятия; на выработку умения правильно выписывать высказывания авторов из имеющихся источников информации, оформлять их по библиографическим нормам; на развитие умения осуществлять анализ выбранных источников информации; на подготовку собственного выступления по обсуждаемым вопросам; на формирование навыка оперативного реагирования на разные мнения, которые могут возникать при обсуждении тех или иных научных проблем. Время на подготовку к семинару по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к коллоквиуму. Коллоквиум представляет собой коллективное обсуждение раздела дисциплины на основе самостоятельного изучения этого раздела студентами. Подготовка к данному виду учебных занятий осуществляется в следующем порядке. Преподаватель дает список вопросов, ответы на которые следует получить при изучении определенного перечня научных источников. Студентам во внеаудиторное время необходимо прочитать специальную литературу, выписать из нее ответы на вопросы, которые будут обсуждаться на коллоквиуме, мысленно сформулировать свое мнение по каждому из вопросов, которое они выскажут на занятии. Время на подготовку к коллоквиуму по нормативам составляет не менее 0,2 часа.

Подготовка к контрольной работе. Контрольная работа назначается после изучения определенного раздела (разделов) дисциплины и представляет собой совокупность развернутых письменных ответов студентов на вопросы, которые они заранее получают от преподавателя. Самостоятельная подготовка к контрольной работе включает в себя: — изучение конспектов лекций, раскрывающих материал, знание которого проверяется контрольной работой; повторение учебного материала, полученного при подготовке к семинарским, практическим занятиям и во время их проведения; изучение дополнительной литературы, в которой конкретизируется содержание проверяемых знаний; составление в мысленной форме ответов на поставленные в контрольной работе вопросы; формирование психологической установки на успешное выполнение всех заданий. Время на подготовку к контрольной работе по нормативам составляет 2 часа.

Подготовка к зачету. Самостоятельная подготовка к зачету должна осуществляться в течение всего семестра. Подготовка включает следующие действия: перечитать все лекции, а также материалы, которые готовились к семинарским и практическим занятиям в течение семестра, соотнести эту информацию с вопросами, которые даны к зачету, если информации недостаточно, ответы находят в предложенной преподавателем литературе. Рекомендуются делать краткие записи. Время на подготовку к зачету по нормативам составляет не менее 4 часов.

Подготовка к экзамену. Самостоятельная подготовка к экзамену схожа с подготовкой к зачету, особенно если он дифференцированный. Но объем учебного материала, который нужно восстановить в памяти к экзамену, вновь осмыслить и понять, значительно больше, поэтому требуется больше времени и умственных усилий. Важно сформировать целостное представление о содержании ответа на каждый вопрос, что предполагает знание разных научных трактовок сущности того или иного явления, процесса, умение раскрывать факторы, определяющие их противоречивость, знание имен ученых, изучавших обсуждаемую проблему. Необходимо также привести информацию о

материалах эмпирических исследований, что указывает на всестороннюю подготовку студента к экзамену. Время на подготовку к экзамену по нормативам составляет 36 часов для бакалавров.

В ФБГОУ ВО «ИГУ» организация самостоятельной работы студентов регламентируется Положением о самостоятельной работе студентов, принятым Ученым советом ИГУ 22 июня 2012 г.

5. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) основная литература

1. Головкин Е.А. Уравнения математической физики. Руководство к решению задач. В 2ч. Ч.1: учеб.пособие/ Е.А.Головкин. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014.–142с. - ISBN 978-5-964-1200-9, ISBN 978-5-964-1201-6. 48 экз+

2. Головкин Е.А. Уравнения математической физики. Руководство к решению задач. В 2ч. Ч.2: учеб.пособие/ Е.А.Головкин. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014.–142с. - ISBN 978-5-964-1200-9, ISBN 978-5-964-1202-3. 48 экз+

3. Астахова, И. В. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие, учеб. для студ. вузов, обуч. по спец. "Мат. методы в экономике" и др. мат. спец. / И. В. Астахова, В. А. Никишкин. - ЭВК. - М. : Изд. центр ЕАОИ . - Режим доступа: ЭЧЗ "Библиотех". - Неогранич. доступ. Ч. 2. - 2011. - ISBN 978-5-374-00487-8 +

б) дополнительная

4. Владимиров, Василий Сергеевич. Уравнения математической физики [Текст] : учеб.для вузов / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. - М. : Физматлит, Лаборатория Базовых Знаний, 2000. - 399 с. : ил. ; 22см. - (Технический университет.Физика - математика). - Библиогр.: с. 399. - ISBN 5922100114

5. Сборник задач по уравнениям математической физики [Текст] / [В.С.Владимиров и др.] ; Под ред.В.С.Владимирова. - 3-е изд.,испр. - М. : Физматлит, 2001. - 286 с. : ил. ; 22см. - Библиогр.:с.287. - ISBN5922100726 : 86.40 р.+ 48 экз.+

6. Тихонов, Андрей Николаевич. Уравнения математической физики : учеб. пособие для студ.физ.-мат. спец. ун-тов / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - 6-е изд., испр. и доп. - М. : Изд-во МГУ, 1999. - 798 с. - ISBN 5211041380 . 28 экз+

7. Алексеев В.В., Крышев И.И., Сазыкина Т.Г. Физическое и математическое моделирование экосистем / . -С.-Петербург: Гидрометеопиздат, 1992. - 368с. - ISBN 5-286-01006-7

8. Белолипецкий В.М., Шоки Ю.И. Математическое моделирование в задачах охраны окружающей среды. - новосибирск: Изд-во "ИНФОЛИО-пресс", 1997. - 240с. - ISBN 5-89590-004-6

9. Нахушиев А.М. Уравнения математической биологии: учеб. пособие для университетов. - М: Высш. шк. 1995. - 301с. - ISBN 5-06-002670-1

10. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. - М.: Мир. - 1985. - 384с.

в) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

<https://isu.bibliotech.ru/>

<http://e.lanbook.com>

<http://rucont.ru/>

<http://ibooks.ru/>

<http://e-library.ru/>

<http://educa.isu.ru/>

6. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Учебно-лабораторное оборудование

ЭТОТ РАЗДЕЛ НЕ ЗАПОЛНЯТЬ

6.2. Программное обеспечение

программное обеспечение не требуется

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Оценочные средства текущего контроля

Вид контроля	Контролируемые темы	Контролируемые компетенции
опрос	Тема 1.2-1.3, 2.3-2.5, 3.1-3.2, 3.4, 4.2, 5.1-5.2, 6.1-6.2	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
КР 1	Тема 1.1	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
КР 2, 3	Тема 1.4	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
КР 4	Тема 2.1	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
КР 5	Тема 2.2	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
КР 6	Тема 3.3	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
КР 7	Тема 4.1	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3
КР 8	Тема 4.3-4.4	ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

Примеры оценочных средств текущего контроля

Пример варианта контрольной работы №1

1. Определить тип уравнения:

- $U_{xx} + 6U_{xy} + U_{yy} + U_x + U_y - 3U = 0$
- $3U_{xx} - 4U_{xy} + 2U_{yy} + 4U_x + 2U - xy = 0$
- $4U_{xx} - 12U_{xy} + 9U_{yy} + U_x - \sin x + 2 = 0$
- $U_{xx} + 4U_{xy} + 5U_{yy} + 5U_{zz} - 4U_{xz} - 6U_{yz} + U_x - x^2U = 0$
- $10U_{xx} + 4U_{xy} + U_{yy} + 3U_{zz} - 6U_{xz} - 4U_{yz} + U - xzy^2 = 0$
- $U_{xy} - 3U_{xz} + 2U_{yz} + 3U_x - U + 2x = 0$
- $U_{xx} + 2U_{xz} - 2U_{xt} + U_{yy} + 2U_{zz} + 2U_{yz} + 2U_{yt} + 2U_{tt} = 0$
- $4U_{xx} + 6U_{xy} + 2U_{yy} + U_{yz} + 2U_{yt} + 2U_{tt} + 5U_z - U = 0$
- $2U_{xy} - 2U_{xz} + 2U_{yz} + 3U - U = 0$
- $U_{xx} + 4U_{xy} + 2U_{xz} + 4U_{yy} + U_{zz} - 2xyU_x + 3xU = 0$
- $3U_{xx} + 4U_{yy} + 5U_{zz} + 4U_{xy} - 4U_{yz} + x - U_y + xye^z = 0$
- $U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + 2U_x + xy^2 = 0$

2. Вдоль соответствующих решений $U(x, y)$ определить тип уравнений:

13. $U_{xx}^3 - 4U_{xy}^2 + 7U_{yy} + U_y + 6x - 4y = 0$, $U = \frac{1}{2}x^2 + xy$.
14. $U_{xx}^2 - 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2 + 2U_x - 2x = 0$, $U = \frac{1}{2}(x+y)^2$.
15. $U_{xy}^2 + U_{xx}U_{yy} + U_{yy}^2 + 2U_{xx} + 2U_{yy} + 1 = 0$, $U_1 = x^2 + y^2$, $U_2 = x$.
16. $U_{xx}^2 U_{xy} - 5U_{yy} - U_x - 2(x+y) - 9 = 0$, $U = x^2 + 2xy$.

3. Определить тип систем:

17.
$$\begin{cases} U_x + 2V_x - U_y + 3V_y + 2V = 0 \\ 2U_x - 3V_x + U_y + 2V - V_y + U = 0 \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} U_x - V_y + 2U_z - 3V_z + U = 0 \\ U_y + 2V_x + 2U_z + V_y + 2V = 0 \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} V_x + 12U_y + V_y + 3U - 32xe^y = 0 \\ -5U_x + \frac{5}{6}V_x + U_y + V_y - e^x U = 0 \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} 15U_x + 9V_x + 17V_y + 12U_y - 3x \cos y = 0 \\ 3U_x + 2U_x + V_y - 6U = 0 \end{cases}$$

4. В зависимости от α определить тип систем:

21.
$$\begin{cases} U_y - \alpha V_x + 2V_y = 0 \\ U_x + \alpha V_y - U = 0 \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} U_x - \alpha V_x + 2V_y = 0 \\ \alpha U_x + V_y + 2U = 0 \end{cases}$$

Пример варианта контрольной работы №2

1. Привести к каноническому виду уравнение:

а) $U_{xx} - 2U_{xy} - 3U_{yy} + U_y = 0$.

б) $4xU_{xx} + yU_{yy} - 2U_y = 0$.

2. Привести к каноническому виду и упростить группу младших производных:

$$U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 4U_x - 3U_y - 7U = 0.$$

Пример варианта контрольной работы №3

Привести к каноническому виду уравнения и, если возможно, упростить группу младших производных:

1. $y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + y u_y = 0$

$$2. 3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0$$

$$3. u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y - 6u_z = 0$$

Пример варианта контрольной работы №4

Задача 1

Однородная бесконечная струна возбуждена начальным отклонением, имеющим форму полуокружности $u(x,0) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$. Начальные скорости отсутствуют. Начертите положение струны для моментов времени $t = 1/2, t = 1, t = 2$, считая для простоты $a = 1$.

Задача 2.

Решить задачи Коши

$$a) \quad u_{tt} = u_{xx} \quad u(x,0) = 1/(1+x^2), \quad u_t(x,0) = 0$$

$$b) \quad u_{tt} = 2u_{xx} \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = xe^{-x^2/2}$$

Пример варианта контрольной работы №5

Решить задачи:

$$u_{tt} = 16u_{xx};$$

$$1. u|_{x=0} = u|_{x=8} = 0;$$

$$u|_{t=0} = 31 \sin \pi x; \quad u_t|_{t=0} = 4\pi \sin \pi x.$$

$$u_{tt} = 9u_{xx};$$

$$2. u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2} = 0;$$

$$u|_{t=0} = 8 \cos 4\pi x; \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

$$u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u;$$

$$3. u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0;$$

$$u|_{t=0} = 10 \cos \frac{3x}{2}; \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Пример варианта контрольной работы №6

1. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге $0 \leq r < 6, 0 \leq \varphi < 2\pi$:

$$\Delta u = 0$$

$$u(6, \varphi) = 7 \cos \varphi + 8 \sin 12\varphi$$

2. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга $0 \leq r < 14, 0 \leq \varphi < 2\pi$:

$$\Delta u = 0$$

$$u(14, \varphi) = 23 \cos 5\varphi + \sin 8\varphi$$

Пример варианта контрольной работы №7

Найти решение задачи Коши для уравнения конвективной диффузии:

$$u_t = u_{xx} - 2u_x, \quad u(x,0) = e^x \sin x, \quad x \in R, t > 0.$$

Пример варианта контрольной работы №8

1. Найти решение смешанной задачи

1) $u_t = u_{xx}, \quad u(0,t) = u(3,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin 3\pi x + \sin 5\pi x;$

2) $u_t = 16u_{xx} + (\sin t + 2 \cos t) \sin 6x, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad u(x,0) = \sin x.$

7.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Список вопросов для промежуточной аттестации:

1. Понятие дифференциального уравнения с частными производными и его решения.
2. Общие сведения о совокупности решений.
3. Задача об эквивалентности системы ДУ и одного ДУ.
4. Определенные, переопределенные и неопределенные системы.
5. Задача Коши для нормальной системы уравнений. Теорема Коши-Ковалевской.
6. Понятие характеристической формы и классификация ЛДУ-2.
7. Классификация линейных и нелинейных уравнений высшего порядка.
8. Классификация систем.
9. Классификация ЛДУ-2 по учебнику Михлина.
10. Характеристические кривые и характеристические направления.
11. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.
12. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
13. Уравнения Лапласа.
14. Волновое уравнение.
15. Уравнение теплопроводности.
16. Постановки основных задач для ЛДУ – 2 и понятие корректности задачи по Адамару.
17. Волновое уравнение с тремя пространственными переменными. Формула Кирхгофа.
18. Волновое уравнение с двумя пространственными переменными. Формула Пуассона.
19. Уравнение колебания струны. Формула Даламбера.
20. Физическая интерпретация формулы Даламбера.
21. Примеры бегущих волн.
22. Область зависимости, область влияния, область определения.
23. Неоднородное волновое уравнение с тремя пространственными переменными.
24. Неоднородное волновое уравнение с двумя и одной пространственной переменной.
25. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения.
26. Корректность постановки задачи Коши.
27. Общая постановка задачи Коши.
28. Задача Гурса.
29. Задача Гурса и первая задача Дарбу.
30. Постановка второй задачи Дарбу.
31. Простейшие свойства гармонических функций.
32. Некоторые частные решения уравнения Лапласа и преобразование радиус-векторов.

33. Элементарные свойства гармонических функций.
34. Связь между аналитическими и гармоническими функциями.
35. Интегральное представление гармонических функций.
36. Формулы о среднем арифметическом для гармонических функций.
37. Принцип экстремума и единственность решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
38. Линейная функция и некоторые свойства.
39. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
40. Решение задачи Дирихле для шара. Формулы Пуассона.
41. Задача Дирихле для уравнения Пуассона.
42. Решение задачи Дирихле для полупространств.
43. Теоремы, вытекающие из формул Пуассона.
44. Непрерывность потенциала объемных масс и его производных первого порядка.
45. Существование производных второго порядка потенциала объемных масс.
46. Формула Гаусса.
47. Потенциал двойного слоя и его свойства.
48. Потенциал простого слоя и задача Неймана.
49. Внешние задачи Дирихле и Неймана.
50. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности.
51. Постановка задачи и доказательство существования ее решения.
52. Единственность и устойчивость решения задачи Коши - Дирихле.
53. Неоднородное уравнение теплопроводности.

Примеры оценочных средств для промежуточной аттестации:

Билет № А.

1. Связь между аналитическими и гармоническими функциями.
2. Решить задачу:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x,0) = \arctg x, \quad u_t(x,0) = x.$$

Разработчик: Гражданцева Е.Ю., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений