



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Иркутский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ИГУ»)
Институт математики, экономики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
директор института
М.В. Фалалеев М.В./
" 17 " 04 2019г.

Рабочая программа дисциплины

Индекс дисциплины по УП: ФТД.2

Наименование дисциплины: Теория обобщенных функций и ее приложения

Направление подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре 01.06.01
Математика и механика

Направленность программы подготовки кадров высшей квалификации (программы аспирантуры): Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Форма обучения: очная

Согласовано с УМК ИМЭИ ИГУ
Протокол № 4 от « 17 » 04 2019 г.

Председатель УМК *В.Г. Антоник* /

Программа рассмотрена на заседании
кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений.
Протокол № 7 от « 22 » 03 2019г

Зав. кафедрой *М.В. Фалалеев* /

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины (модуля)
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП.
3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной работы
5. Содержание дисциплины (модуля)
 - 5.1 Содержание разделов и тем дисциплины (модуля)
 - 5.2 Разделы дисциплины (модуля) и междисциплинарные связи с обеспечивающими (последующими) дисциплинами (модулями)
 - 5.3 Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий
6. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ.
7. Примерная тематика курсовых работ (проектов) (при наличии)
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):
 - а) основная литература;
 - б) дополнительная литература;
 - в) программное обеспечение;
 - г) базы данных, поисково-справочные и информационные системы
9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля).
10. Образовательные технологии
11. Оценочные средства. (ОС).

1. Цели и задачи дисциплины:

Цель – формирование у будущих специалистов современных теоретических знаний в области неклассических методов решения интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и практических навыков в их использовании при решении задач исследовательского типа как теоретического плана, так и с практическим содержанием, отработке начальных навыков математического моделирования. Что позволяет освоить такие трудовые функции, как проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских разработок при исследовании самостоятельных тем, проведение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ по тематике организации.

Задачи – Изучить основные понятия и методы теории обобщенных функций. Научиться выполнять все операции с обобщенными функциями в банаховых пространствах с последующим их применением к решению начально-краевых задач для неклассических уравнений математической физики. Познакомиться с современными обобщениями этой теории.

2. Место дисциплины в структуре ООП:

Курс входит в блок факультативных дисциплин специализации «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление». Для его изучения и освоения нужны знания из курсов математического и функционального анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, теории функций комплексных переменных. Знания и умения, приобретенные студентами в результате изучения дисциплины, востребованы в математическом моделировании, при выполнении курсовых и дипломных работ, связанных с решением конкретных задач из механики, физики и т.п.

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций: ОПК-1, ПК-1.

ОПК-1 – способностью находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики,

ПК-1 - способность корректно ставить математические задачи в выбранном направлении исследования.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные понятия дисциплины (ОПК-1).

Уметь: применить полученные знания к прикладным задачам (ОПК-1, ПК-1).

Владеть: аппаратом изученных знаний (ОПК-1, ПК-1).

4. Объем дисциплины и виды учебной работы (разделяется по формам обучения)

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры		
			3	
Аудиторные занятия (всего)	24		24	
В том числе:	-		-	-
Лекции (Л)	12		12	
Практические занятия (ПЗ)	12		12	
Самостоятельная работа (всего)	48		48	
В том числе:	-		-	-
<i>Другие виды самостоятельной работы</i>	48		48	
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	зачет		зачет	
Общая трудоемкость	72		72	
часы				
зачетные единицы	2		2	

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов и тем дисциплины. Все разделы и темы нумеруются.

1. Основные пространства D и S .
2. Понятия обобщенной функции, регулярной и сингулярной обобщенной функции, носителя обобщенной функции, равенства двух обобщенных функций.
3. Пространства обобщенных функций D' и S' .
4. Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях и умножение обобщенных функций.
5. Дифференцирование обобщенных функций.
6. Прямое (тензорное) произведение и свертка обобщенных функций.
7. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
8. Интегральные преобразования обобщенных функций.
9. Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и некоторые специальные факты о конечномерных пространствах.
10. Корректные (равномерно корректные) задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Понятие разрешающего (эволюционного) оператора.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов и тем данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин (вписываются разработчиком)
1.	Практика	1-10
2.	НКР (диссертация)	1-10

5.3. Разделы и темы дисциплины и виды занятий

№ п/ п	Наименование раздела	Наименование темы	Виды занятий в часах					
			Лек ц.	Практ. зан.	Сем ин	Ла б. зан	СР С	Всег о
1	Основное пространство D Основное пространство S	Основное пространство D Основное пространство S	1					1
2	Понятие обобщенной функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции Понятие носителя обобщенной функции и равенства двух обобщенных функций	Понятие обобщенной функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции Понятие носителя обобщенной функции и равенства двух обобщенных функций	1				2	3

3	Пространства обобщенных функций D' и S' .	Пространства обобщенных функций D' и S' .	1	1			2	4
4	Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях	Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях	1	1			4	6
5	Умножение обобщенных функций	Умножение обобщенных функций	1	1			4	6
6	Дифференцирование обобщенных функций	Дифференцирование обобщенных функций	1	1			4	6
7	Прямое (тензорное) произведение обобщенных функций	Прямое (тензорное) произведение обобщенных функций	1	1			4	6
8	Свертка обобщенных функций	Свертка обобщенных функций	1	1			4	6
9	Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами	Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами	1	1			4	6
10	Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами	Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами	1	1			4	6
11	Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	1	1			4	6
12	Интегральные преобразования обобщенных функций	Интегральные преобразования обобщенных функций	1	1			4	6
13	Некоторые специальные факты о конечномерных пространствах	Некоторые специальные факты о конечномерных пространствах		1			4	5
14	Понятие корректной (равномерно корректной) задачи Коши для дифференциального	Понятие корректной (равномерно корректной) задачи Коши для дифференциального		1			4	5

дифференциального уравнения в банаховом пространстве Понятие разрешающего (эволюционного) оператора	уравнения в банаховом пространстве Понятие разрешающего (эволюционного) оператора						
---	---	--	--	--	--	--	--

6. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

№ п/п	№ раздела и темы дисциплины (модуля)	Наименование семинаров, практических и лабораторных работ	Трудоемкость (часы)	Оценочные средства	Формируемые компетенции
1	2	3	4	5	6
1.	3	Пространства обобщенных функций D' и S' .	1	зачет	ОПК-1, ПК-1
2.	4	Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях	1		
3.	5	Умножение обобщенных функций	1		
4	6	Дифференцирование обобщенных функций	1		
5	7	Прямое (тензорное) произведение обобщенных функций	1		
6	8	Свертка обобщенных функций	1		
7	9	Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами	1		
8	10	Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами	1		
9	11	Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	1		
10	12	Интегральные преобразования обобщенных функций	1		
11	13	Некоторые специальные факты о конечномерных пространствах	1		
12	14	Понятие корректной (равномерно корректной) задачи Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве Понятие разрешающего (эволюционного) оператора	1		

7. Примерная тематика курсовых работ (проектов) (при наличии)

курсовых работ (проектов) не предусмотрено.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):

а) основная литература

1. **Гражданцева, Елена Юрьевна.** Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах/ Е. Ю. Гражданцева; рец.: М. В. Фалалеев, Г. А. Свиридов; Иркутский гос. ун-т. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 91 с. - ISBN 978-5-9624-0903-0, 5 экз.

2. **Орлов, Сергей Сергеевич.** Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах/ С. С. Орлов ; рец.: А. Л. Козаков, Д. Н. Сидоров; Иркут.гос. ун-т, Ин-т математики, экономики и информатики. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – 149 с.- ISBN 978-5-9624-1030-2, 5 экз.

3. **Фалалеев, Михаил Валентинович.** Обобщенные функции и действия над ними [Текст] : учеб.-метод. пособие / М. В. Фалалеев ; Иркутский гос. ун-т. - 2-е изд., испр. и доп. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2011. - 106 с.- ISBN 978-5-9624-0503-2, 5 экз.

б) дополнительная литература

1. **Гражданцева Е.Ю.** Интегральное преобразование обобщенных функций / Е.Ю. Гражданцева – Иркутск, изд-во ИГУ, 2009.- , 5 экз.

2. **Орлов, Сергей Сергеевич.** Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах [Электронный ресурс] / С. С. Орлов. - ЭВК. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2014. - Режим доступа: ЭЧЗ "Библиотех". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-9624-1030-2.

3. **Фалалеев, Михаил Валентинович.** Обобщенные функции и действия над ними [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие / М. В. Фалалеев. - 2-е изд., испр. и доп. - ЭВК. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2011. - Режим доступа: ЭЧЗ "Библиотех". - Неогранич. доступ. - ISBN 978-5-9624-0503-2.

в) программное обеспечение –

Microsoft Windows 7 Pro 64 bit (Сублицензионный договор №570 от 07.03.2017г.);

LibreOffice (распространяется бесплатно);

AcrobatReader (распространяется бесплатно)

OpenOffice 4.1.3 Условия использования по ссылке:

<https://www.openoffice.org/licenses/PDL.html>;

LibreOffice Условия использования по ссылке: <http://www.LibreOffice.org/about-us/licenses/>;

VLC Player 2.2.4 Условия использования по ссылке:

<http://www.videolan.org/legal.html>;

PDF24Creator 8.0.2 Условия использования по ссылке:

https://en.pdf24.org/pdf/lizenz_en_de.pdf;

7zip 16.04 Условия использования по ссылке:

<http://7-zip.org/license.txt>.

Браузер Google Chrome;

Браузер Mozilla Firefox.

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

Интернет-источники: <http://matan.isu.ru>

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Аудитория оборудована специализированной мебелью (столы, стулья, одинарная стеклянная меловая доска) на 20 рабочих мест, и техническими средствами обучения, служащими для представления информации в большой аудитории (мобильный проектор Epson EB-X12, XGA1024*768, ноутбук ASUS X51L IntelCeleron 560, 2.13 GHz., экран).

Наборы демонстрационного оборудования и учебно-наглядных пособий, обеспечивающие тематические иллюстрации, соответствующие рабочей программе дисциплины.

Компьютерный класс, оборудованный учебной мебелью на 25 посадочных мест, компьютерами: моноблок Hewlett-PackardDualCoreIntelCore i3-3240, 3.40 GHz (25 шт.) с неограниченным доступом к сети Интернет и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации; доска для маркеров; мобильный проектор Epson EB-X12, XGA1024*768.

10. Образовательные технологии:

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU, более 20 полнотекстовых версий журналов по тематике курса. Доступ с любого компьютера, подключенного через прокси-сервер Иркутского государственного университета.
2. Электронная библиотека "Труды ученых ИГУ" (<http://ellib.library.isu.ru>). Доступ к полным текстам учебных пособий, монографий и статей сотрудников университета, осуществляемый с любого компьютера сети Иркутского государственного университета.
3. Общероссийский математический портал - информационная система Math-Net.Ru – доступ к российским математическим журналам и обзорам ВИНИТИ РАН
4. Журнал "Известия Иркутского университета. Серия Математика". Свободный доступ к электронным полнотекстовым версиям с 2007 г. осуществляется с сайта университета <http://www.isu.ru/izvestia>
5. Архив научных журналов JSTOR (<http://www.jstor.org>). Доступ с любого компьютера, подключенного через прокси-сервер Иркутского государственного университета.

11. Оценочные средства (ОС):

11.1. Оценочные средства для входного контроля - в виде тестов с закрытыми вопросами.

11.2. Оценочные средства текущего контроля.

Формы текущего контроля успеваемости обучающихся - доклады по выбранным темам самостоятельной работы (на каждом втором аудиторном занятии).

Тематика заданий для самостоятельной работы

1. Понятия обобщенной функции, регулярной и сингулярной обобщенной функции, носителя обобщенной функции, равенства двух обобщенных функций.
2. Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях и умножение обобщенных функций.
3. Дифференцирование обобщенных функций.
4. Прямое (тензорное) произведение и свертка обобщенных функций.
5. Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами и задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
6. Интегральные преобразования обобщенных функций.
7. Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и некоторые специальные факты о конечномерных пространствах.

8. Корректные (равномерно корректные) задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Понятие разрешающего (эволюционного) оператора.

а. Оценочные средства для промежуточной аттестации
Дисциплина завершается зачетом, на котором проверяется усвоение обучающимися основных понятий и свойств, а также их применение в решении поставленных математических задач в письменно – устной форме с решением задач.

Вопросы к зачету:

1. При всех значениях параметра $k \in N \cup \{0\}$ исследовать на сингулярность обобщенные функции $x^k \cdot P \frac{1}{x^3}$.

2. Найти в $S'(R^1)$ преобразования Фурье обобщенных функций:

$$\text{а)} P \frac{1}{x} \text{ и } sign x, \quad \text{б)} e^{-a|x|} \text{ и } \frac{2a}{a^2 + x^2}, a > 0,$$

$$\text{в)} \frac{x^n}{n!} e^{-ax} \theta(x), n \in N, a > 0, \quad \text{г)} \delta(x - x_0) \pm \delta(x + x_0) \text{ и } e^{ax} \theta(-x).$$

3. Зная, что $F\left[P \frac{1}{x}\right] = sign x$, найти в $S'(R^1)$ преобразования Фурье обобщенных функций $P \frac{1}{x^2}$ и $|x|$.

4. Зная, что $F[\theta(x)] = \pi \delta(\xi) + i P \frac{1}{\xi}$, найти в $S'(R^1)$ преобразования Фурье обобщенных функций $x \theta(x)$ и $x^2 \theta(x)$.

5. Доказать, что в $D'(R^1)$ следующие предельные равенства:

$$\text{а)} g_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) + \frac{1}{\varepsilon} \delta(x) \rightarrow \delta'(x) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0+,$$

$$\text{б)} f_\varepsilon(x) = \frac{x^2}{2\varepsilon^3} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \rightarrow \delta(x) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0+,$$

$$\text{в)} f_\varepsilon(x) = \frac{x}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \rightarrow \delta(x) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0+,$$

$$\text{г)} f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \rightarrow \delta(x) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0+,$$

$$\text{д)} f_\varepsilon(x) = \frac{x^n}{n! \varepsilon^{n+1}} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \rightarrow \delta(x), n \in N \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

6. Доказать, что в $S'(R^1)$ $f_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x} \theta(x) \rightarrow \theta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

7. Доказать в $D'(R^1)$ равенство $f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x)$, если

$$f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + x^2)}.$$

8. Найти следующие производные :

$$\text{а)} (\cos x \theta(x))'', \quad \text{б)} (x sign x)'', \quad \text{в)} \theta^{(m)}(x_0 - x),$$

$$\text{г) } (\sin x \theta(x))'', \quad \text{д) } (e^{ax} \theta(x))'', \quad \text{е) } (\operatorname{sign} x)^{(m)}, \quad \text{ж) } [2x]^{(m)}.$$

Разработчики:

доцент кафедры математического анализа и и дифференциальных уравнений
Е.Ю. Гражданцева

**Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме
без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика
программы.**