



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«Иркутский государственный университет»**  
**(ФГБОУ ВО «ИГУ»)**

Институт математики, экономики и информатики



**Рабочая программа дисциплины**

Индекс дисциплины по УП: Б1.В.ДВ.2.2

Наименование дисциплины: Уравнения математической физики и приложения

Направление подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре  
01.06.01 Математика и механика

Направленность программы подготовки кадров высшей квалификации (программы аспирантуры): Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Форма обучения: очная

**Иркутск 2016 г.**

Одобрена Советом института математики,  
экономики и информатики  
протокол № 7 от «22» 06 2016 г.

Директор ИМЭИ  /Фалалеев М.В./

Программа рассмотрена на заседании кафедры  
математического анализа и дифференциальных  
уравнений «25» 05 2016 г. Протокол № 9

Зав. кафедрой  /Фалалеев М.В./

## Содержание

1. Цели и задачи дисциплины (модуля)
2. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП.
3. Требования к результатам освоения дисциплины (модуля)
4. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной работы
5. Содержание дисциплины (модуля)
- 5.1 Содержание разделов и тем дисциплины (модуля)
- 5.2 Разделы дисциплины (модуля) и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами (модулями)
- 5.3 Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий
- 5.4 Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ.
6. Примерная тематика рефератов (при наличии)
7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):
  - а) основная литература;
  - б) дополнительная литература;
  - в) программное обеспечение;
  - г) интернет-ресурсы, базы данных, информационно-справочные и поисковые системы
8. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля).
9. Образовательные технологии
10. Фонды оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации
  - 10.1 Оценочные средства текущего контроля
  - 10.2 Оценочные средства для промежуточной аттестации

### 1. Цели и задачи дисциплины:

В настоящее время математическое моделирование является одним из основных методов решения научных, инженерных, экономических проблем. Основой математических моделей, как правило, являются уравнения математической физики, опыт исследования которых представляет теоретический и практический интерес у специалистов самых разных профессиональных направлений.

Целью преподавания дисциплины «Уравнения математической физики и приложения» является формирование у аспирантов современных теоретических знаний в области методов решения задач математической физики, описывающих некоторые физические процессы, а также практических навыков в их использовании при решении конкретных задач в таких областях науки и деятельности общества, как энергетика, охрана окружающей среды, гидродинамика, теория упругости и др.

### 2. Место дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина относится к циклу дисциплин по выбору вариативной части дисциплин. Для изучения и освоения дисциплины нужны первоначальные знания из курсов математического анализа, линейной алгебры, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории функций комплексных переменных.

Знания и умения, приобретенные аспирантами в результате изучения дисциплины, будут использоваться при изучении курсов математического моделирования, при выполнении диссертационных работ, связанных с решением конкретных задач из механики, физики и т.п.

### 3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций: ПК-1, ПК-2, ПК-3.

В результате изучения дисциплины аспирант должен:

- **знать:** основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, основные уравнения математической физики и классические задачи для них, понятие обобщенного решения задачи для уравнения с частными производными.

- **уметь:** решать задачи по дисциплине изученными методами и приводить анализ полученного решения; ставить задачи в обобщенной постановке для дифференциальных уравнений, самостоятельно изучать и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами.

- **владеть:** изученными методами решения задач для уравнений с частными производными.

### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов / зачетных единиц	Курсы			
			2		
<b>Аудиторные занятия (всего)</b>	48		48		
В том числе:	-	-	-	-	-
Лекции	24		24		
Практические занятия (ПЗ)	24		24		
<b>Самостоятельная работа (всего)</b>	60		60		
В том числе:	-	-	-	-	-
Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к зачету	60		60		
<b>Контактная работа</b>	54		54		
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен и др.)	Зачет с		Заче		

др.)	оценкой		т с оце нко й		
Общая трудоемкость	часы	108	108		
	зачетные единицы	3	3		

## 5. Содержание дисциплины

### 5.1. Содержание разделов и тем дисциплины.

№	Наименование раздела	Содержание раздела дисциплины
1	<b>Введение</b>	<p>1. Уравнения в частных производных. Понятие решения. Уравнение колебаний струны, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа.</p> <p>2. Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка. Характеристики. Методы интегрирования.</p> <p>3. Линейные уравнения второго порядка от 2-х независимых переменных. Приведение к каноническому виду методом характеристик. Классификация.</p> <p>4. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами от n независимых переменных. Приведение к каноническому виду. Классификация.</p>
2	<b>Уравнения гиперболического типа</b>	<p>1. Постановка задачи Коши для уравнения колебаний струны. Вывод формулы Даламбера.</p> <p>2. Область зависимости (решения от начальных условий). Существование, единственность, непрерывная зависимость от начальных условий решения задачи Коши.</p> <p>3. Смешанная задача для полуограниченной струны. Решение методом нечетных и четных продолжений (в зависимости от типа краевого условия).</p> <p>4. Смешанная задача для ограниченной струны.</p> <p>5. Постановка задачи Коши для гиперболического уравнения. Теорема Ковалевской о единственности и локальной разрешимости задачи Коши для системы Ковалевской в классе аналитических функций (формулировка, доказательство единственности). Пример Адамара, иллюстрирующий, что для уравнений в частных производных, для которых решение задачи Коши существует и единственно, оно не обязательно непрерывно зависит от начальных данных. Пример Ковалевской, иллюстрирующий, что если система не является системой Ковалевской, то решение задачи Коши может не существовать.</p> <p>6. Понятие характеристического направления и характеристической поверхности. Характеристические направления и поверхности для уравнения колебаний струны, уравнения теплопроводности, уравнения Лапласа, для многомерного волнового уравнения. Постановка обобщенной задачи Коши с данными на нехарактеристической поверхности. Пример, показывающий, что если данные Коши заданы на</p>

		<p>характеристических поверхностях, решение задачи Коши может не существовать или не быть единственным.</p> <p>7. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения в случае неаналитических коэффициентов и начальных данных.</p> <p>8. Формула Грина. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера.</p> <p>9. Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае неаналитических коэффициентов и начальных данных при <math>n = 3</math>. Формула Кирхгофа. Вывод.</p> <p>10. Метод спуска. Вывод формулы Пуассона из формулы Кирхгофа. Вывод формулы Даламбера из формулы Пуассона.</p> <p>11. Смешанная задача для уравнения колебаний струны. Решение методом Фурье. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции для различных типов краевых условий, их свойства. Интерпретация решения смешанной задачи. Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны при помощи известных свойств рядов Фурье.</p>
3	<b>Уравнения параболического типа</b>	<p>1. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Вывод формулы Пуассона в одномерном случае. Смешанная задача для уравнения теплопроводности и ее решение методом Фурье.</p> <p>2. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области.</p> <p>3. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в полосе. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.</p> <p>4. Теорема о стабилизации решения задачи Коши. Теорема об оценке скорости убывания решения в ограниченной области при <math>t \rightarrow \infty</math>.</p>
4	<b>Уравнения эллиптического типа</b>	<p>1. Гармонические функции. Уравнение Лапласа. Некорректность постановки задачи Коши. Постановка задач Дирихле и Неймана в ограниченной области. Радиально симметричные решения уравнения Лапласа.</p> <p>2. Принцип максимума. Доказательство единственности и непрерывной зависимости от граничных условий решения задачи Дирихле.</p> <p>3. Лемма о знаке производной гармонической функции в точке минимума.</p> <p>4. Строгий принцип максимума. Условие разрешимости задачи Неймана. Доказательство единственности решения задачи Неймана с точностью до константы.</p> <p>5. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Ослабление условий гладкости граничной функции в задаче Дирихле.</p> <p>6. Теорема о среднем (доказательство для круга). 1-я, 2-я теоремы Харнака. Неравенства Харнака. Теорема Лиувилля.</p> <p>7. Теорема об аналитичности гармонической функции в <math>\mathbb{R}^2</math>. Теорема об устранении особенности гармонических функций.</p>

	<p>8. Оценки Бернштейна производных гармонических функций. Теорема об аналитичности гармонической функции в <math>R^n</math>.</p> <p>9. Функция Грина и ее свойства. Фундаментальное решение оператора Лапласа.</p> <p>10. Внешние краевые задачи Дирихле и Неймана в <math>R^2</math> и в <math>R^n, n &gt; 2</math></p> <p>11. Определение обобщенной производной по Соболеву. Ее свойства. Пространства <math>H^1</math> и <math>H^1</math>. Неравенство Фридрихса.</p> <p>12. Определение операции усреднения, свойства.</p> <p>13. Вариационный метод. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в <math>H^1</math>.</p>
--	--

### 5.2. Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов и тем данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин (вписываются разработчиком)													
		1	2	3	4										
1.	Подготовка диссертационной работы														

### 5.3. Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела	Наименование темы	Виды занятий в часах			
			Лекц.	Практ. зан.	СРС	Всего
1.	Введение	<p>1. Уравнения в частных производных. Понятие решения. Уравнение колебаний струны, уравнение теплопроводности, уравнение Лапласа.</p> <p>2. Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка. Характеристики. Методы интегрирования.</p> <p>3. Линейные уравнения второго порядка от 2-х независимых переменных. Приведение к каноническому виду методом характеристик. Классификация.</p> <p>4. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами от n независимых переменных. Приведение к каноническому виду. Классификация.</p>	4	4	10	18
2.	Уравнения гиперболического типа	<p>1. Постановка задачи Коши для уравнения колебаний струны. Вывод формулы Даламбера.</p> <p>2. Область зависимости (решения от начальных условий).</p>	10	10	25	45

		<p>Существование, единственность, непрерывная зависимость от начальных условий решения задачи Коши.</p> <p>3. Смешанная задача для полуограниченной струны. Решение методом нечетных и четных продолжений (в зависимости от типа краевого условия).</p> <p>4. Смешанная задача для ограниченной струны.</p> <p>5. Постановка задачи Коши для гиперболического уравнения. Теорема Ковалевской о единственности и локальной разрешимости задачи Коши для системы Ковалевской в классе аналитических функций (формулировка, доказательство единственности). Пример Адамара, иллюстрирующий, что для уравнений в частных производных, для которых решение задачи Коши существует и единственно, оно не обязательно непрерывно зависит от начальных данных. Пример Ковалевской, иллюстрирующий, что если система не является системой Ковалевской, то решение задачи Коши может не существовать.</p> <p>6. Понятие характеристического направления и характеристической поверхности. Характеристические направления и поверхности для уравнения колебаний струны, уравнения теплопроводности, уравнения Лапласа, для многомерного волнового уравнения. Постановка обобщенной задачи Коши с данными на нехарактеристической поверхности. Пример, показывающий, что если данные Коши заданы на характеристических поверхностях, решение задачи Коши может не существовать или не быть единственным.</p> <p>7. Единственность решения задачи Коши для волнового уравнения в случае неаналитических коэффициентов и</p>				
--	--	--	--	--	--	--



		<p>начальных данных.</p> <p>8. Формула Грина. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера.</p> <p>9. Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае неаналитических коэффициентов и начальных данных при <math>n = 3</math>. Формула Кирхгофа. Вывод.</p> <p>10. Метод спуска. Вывод формулы Пуассона из формулы Кирхгофа. Вывод формулы Даламбера из формулы Пуассона.</p> <p>11. Смешанная задача для уравнения колебаний струны. Решение методом Фурье. Задача Штурма – Лиувилля. Собственные значения и собственные функции для различных типов краевых условий, их свойства. Интерпретация решения смешанной задачи. Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний струны при помощи известных свойств рядов Фурье.</p>				
3.	Уравнения параболического типа	<p>5. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Вывод формулы Пуассона в одномерном случае. Смешанная задача для уравнения теплопроводности и ее решение методом Фурье.</p> <p>6. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области.</p> <p>7. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в полосе. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.</p> <p>8. Теорема о стабилизации решения задачи Коши. Теорема об оценке скорости убывания решения в ограниченной области при <math>t \rightarrow \infty</math>.</p>	6	6	20	32
4.	Уравнения эллиптического типа	<p>1. Гармонические функции. Уравнение Лапласа. Некорректность постановки задачи Коши. Постановка задач Дирихле и Неймана в ограниченной области. Радиально симметричные решения</p>				

		<p>уравнения Лапласа.</p> <p>2. Принцип максимума. Доказательство единственности и непрерывной зависимости от граничных условий решения задачи Дирихле.</p> <p>3. Лемма о знаке производной гармонической функции в точке минимума.</p> <p>4. Строгий принцип максимума. Условие разрешимости задачи Неймана. Доказательство единственности решения задачи Неймана с точностью до константы.</p> <p>5. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Ослабление условий гладкости граничной функции в задаче Дирихле.</p> <p>6. Теорема о среднем (доказательство для круга). 1-я, 2-я теоремы Харнака. Неравенства Харнака. Теорема Лиувилля.</p> <p>7. Теорема об аналитичности гармонической функции в <math>R^2</math>. Теорема об устранении особенности гармонических функций.</p> <p>8. Оценки Бернштейна производных гармонических функций. Теорема об аналитичности гармонической функции в <math>R^n</math>.</p> <p>9. Функция Грина и ее свойства. Фундаментальное решение оператора Лапласа.</p> <p>10. Внешние краевые задачи Дирихле и Неймана в <math>R^2</math> и в <math>R^n</math>, <math>n &gt; 2</math></p> <p>11. Определение обобщенной производной по Соболеву. Ее свойства. Пространства <math>H^1</math> и <math>H^1</math>. Неравенство Фридрихса.</p> <p>12. Определение операции усреднения, свойства.</p> <p>13.. Вариационный метод. Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в <math>H^1</math></p>				
--	--	--	--	--	--	--

#### 5.4. Перечень семинарских, практических занятий и лабораторных работ

№ п/п	№ раздела и темы	Наименование семинаров, практических и лабораторных	Труд оемк	Оценочные средства	Форм ируем
-------	------------------	---	-----------	--------------------	------------

	дисциплины	работ	время (часы)		компетенции
1.	1	1. Линейные уравнения второго порядка от 2-х независимых переменных. Приведение к каноническому виду методом характеристик. Классификация.	2	Отчет по индивидуальным заданиям.  Проверка домашних работ.	ПК-1, ПК-2, ПК-3.
		2. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами от n независимых переменных. Приведение к каноническому виду. Классификация.	2		
2.	2	1. Задача Коши для уравнения колебаний струны. Формула Даламбера.	2	Отчет по индивидуальным заданиям.  Проверка домашних работ.	ПК-1, ПК-2, ПК-3.
		2. Задача Коши для общего уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными и ее решение методом характеристик	2		
		3. Смешанная задача для уравнения колебаний струны. Решение методом Фурье.	6		
3.	3	1. Задача Коши для уравнения теплопроводности.	2	Отчет по индивидуальным заданиям.  Проверка домашних работ.	ПК-1, ПК-2, ПК-3.
		2. Смешанная задача для уравнения теплопроводности и ее решение методом Фурье	4		
4.	4	1. Гармонические функции. Уравнение Лапласа.	1	Отчет по индивидуальным заданиям	ПК-1, ПК-2, ПК-3.
		2. Решение задачи Дирихле для круга и кругового сектора методом Фурье	3		

**6. Примерная тематика рефератов, докладов, проектов (при наличии); перечень**

## **вопросов к зачетам, экзаменам и т.п.:**

### **Вопросы к зачету:**

1. Классификация уравнений и систем с частными производными первого порядка.
2. Задача Коши для уравнений и систем с частными производными первого порядка.
3. Теорема Коши-Ковалевской
4. Начально-краевые задачи для уравнений и систем с частными производными первого порядка.
5. Градиентная катастрофа и ее физический смысл.
6. Системы гиперболического типа, их приведение к стандартному виду.
7. Инварианты Римана.
8. Характеристики
9. Модель газовой динамики
10. Вывод системы дифференциальных уравнений газовой динамики из интегральных законов сохранения.
11. Сильные и слабые разрывы в газовых течениях
12. Ударные волны, их свойства
13. Специальные модели движения газа

### **7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:**

#### **а) основная литература**

1. **Сидоров, Денис Николаевич.** Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения [Текст] / Д. Н. Сидоров ; рец.: В. К. Горбунов, А. Лоренци, В. С. Сизиков ; ред. М. В. Фалалеев ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т математики, экономики и информатики. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. - 293 с. 34 экз.

2. **Кузнецов, Павел Александрович.** Аналитические решения начально-краевых задач с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности [Текст] / П. А. Кузнецов, А. Л. Казаков ; рец.: Г. В. Демиденко, Г. А. Рудых ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т мат., эконом. и информ. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2014. - 99 с. 19 экз.

3. **Леонтьев, Роман Юрьевич.** Нелинейные уравнения в банаховых пространствах с векторным параметром в нерегулярных случаях/ Р. Ю Леонтьев ; рец.: А. П. Казаков, Н. А. Сидоров; Иркутский гос. ун-т, Ин-т математики, экономики и информатики. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 101 с. 21 экз.

4. **Гражданцева, Елена Юрьевна.** Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах/ Е. Ю. Гражданцева ; рец.: М. В. Фалалеев, Г. А. Свиридюк; Иркутский гос. ун-т. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. – 91. 25 экз.

5. **Орлов, Сергей Сергеевич.** Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах/ С. С. Орлов ; рец.: А. Л. Казаков, Д. Н. Сидоров; Иркут. гос. ун-т, Ин-т математики, экономики и информатики. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – 149 с. 17 экз.

#### **б) дополнительная литература**

1. **Ковеня, Виктор Михайлович.** Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогидродинамики/ В. М. Ковеня ; отв. ред. Ю. И. Шокин; СО РАН, Ин-т выч. технологий. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. – 280 с.2 экз.

в) программное обеспечение – не предусмотрено

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

Интернет-источники: <http://matan.isu.ru>

### **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа на 40 рабочих мест, оборудованная специализированной (учебной) мебелью; доска для мела, оборудованием для презентации учебного материала: стационарный проектор Casio XJ-

V1, XGA1024\*768; ноутбук ASUS X51L Intel Celeron 560, 2.13 GHz.

### 9. Образовательные технологии:

1. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU, более 20 полнотекстовых версий журналов по тематике курса. Доступ с любого компьютера, подключенного через прокси-сервер Иркутского государственного университета.
2. Электронная библиотека "Труды ученых ИГУ" (<http://ellib.library.isu.ru>). Доступ к полным текстам учебных пособий, монографий и статей сотрудников университета, осуществляемый с любого компьютера сети Иркутского государственного университета.
3. Общероссийский математический портал - информационная система Math-Net.Ru – доступ к российским математическим журналам и обзорам ВИНТИ РАН
4. Журнал "Известия Иркутского университета. Серия Математика". Свободный доступ к электронным полнотекстовым версиям с 2007 г. осуществляется с сайта университета <http://www.isu.ru/izvestia>
5. Архив научных журналов JSTOR (<http://www.jstor.org>). Доступ с любого компьютера, подключенного через прокси-сервер Иркутского государственного университета.

### 10. Фонды оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

#### 10.1 Оценочные средства текущего контроля:

Формы текущего контроля успеваемости студентов – отчет по индивидуальным заданиям по каждой теме.

#### Примеры индивидуальных заданий:

##### №1

1. Определить тип уравнения:

1.  $U_{xx} + 6U_{xy} + U_{yy} + U_x + U_y - 3U = 0$
2.  $3U_{xx} - 4U_{xy} + 2U_{yy} + 4U_x + 2U - xy = 0$
3.  $4U_{xx} - 12U_{xy} + 9U_{yy} + U_x - \sin x + 2 = 0$
4.  $U_{xx} + 4U_{xy} + 5U_{yy} + 5U_{zz} - 4U_{xz} - 6U_{yz} + U_x - x^2U = 0$
5.  $10U_{xx} + 4U_{xy} + U_{yy} + 3U_{zz} - 6U_{xz} - 4U_{yz} + U - xzy^2 = 0$
6.  $U_{xy} - 3U_{xz} + 2U_{yz} + 3U_x - U + 2x = 0$
7.  $U_{xx} + 2U_{xz} - 2U_{xt} + U_{yy} + 2U_{zz} + 2U_{yz} + 2U_{yt} + 2U_{tt} = 0$
8.  $4U_{xx} + 6U_{xy} + 2U_{yy} + U_{yz} + 2U_{yt} + 2U_{tt} + 5U_z - U = 0$
9.  $2U_{xy} - 2U_{xz} + 2U_{yz} + 3U - U = 0$
10.  $U_{xx} + 4U_{xy} + 2U_{xz} + 4U_{yy} + U_{zz} - 2xyU_x + 3xU = 0$
11.  $3U_{xx} + 4U_{yy} + 5U_{zz} + 4U_{xy} - 4U_{yz} + x - U_y + xye^z = 0$
12.  $U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + 2U_x + xy^2 = 0$

2. Вдоль соответствующих решений  $U(x, y)$  определить тип уравнений:

13.  $U_{xx}^3 - 4U_{xy}^2 + 7U_{yy} + U_y + 6x - 4y = 0$ ,  $U = \frac{1}{2}x^2 + xy$ .
14.  $U_{xx}^2 - 2U_{xy}^2 + U_{yy}^2 + 2U_x - 2x = 0$ ,  $U = \frac{1}{2}(x + y)^2$ .

$$15. U_{xy}^2 + U_{xx}U_{yy} + U_{yy}^2 + 2U_{xx} + 2U_{yy} + 1 = 0, U_1 = x^2 + y^2, U_2 = x.$$

$$16. U_{xx}U_{xy} - 5U_{yy} - U_x - 2(x+y) - 9 = 0, U = x^2 + 2xy.$$

3. Определить тип систем:

$$17. \begin{cases} U_x + 2V_x - U_y + 3V_y + 2V = 0 \\ 2U_x - 3V_x + U_y + 2V - V_y + U = 0 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} U_x - V_y + 2U_z - 3V_z + U = 0 \\ U_y + 2V_x + 2U_z + V_y + 2V = 0 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} V_x + 12U_y + V_y + 3U - 32xe^y = 0 \\ -5U_x + \frac{5}{6}V_x + U_y + V_y - e^xU = 0 \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 15U_x + 9V_x + 17V_y + 12U_y - 3x \cos y = 0 \\ 3U_x + 2U_x + V_y - 6U = 0 \end{cases}$$

4. В зависимости от  $\alpha$  определить тип систем:

$$21. \begin{cases} U_y - \alpha V_x + 2V_y = 0 \\ U_x + \alpha V_y - U = 0 \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} U_x - \alpha V_x + 2V_y = 0 \\ \alpha U_x + V_y + 2U = 0 \end{cases}$$

## №2

1. Привести к каноническому виду уравнение:

$$а) U_{xx} - 2U_{xy} - 3U_{yy} + U_y = 0.$$

$$б) 4xU_{xx} + yU_{yy} - 2U_y = 0.$$

2. Привести к каноническому виду и упростить группу младших производных:

$$U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} + 4U_x - 3U_y - 7U = 0.$$

## №3

Привести к каноническому виду уравнения и, если возможно, упростить группу младших производных:

$$1. y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + 2x^2u_{yy} + uy_y = 0$$

$$2. 3u_{xx} + u_{xy} + 3u_x + u_y - u + y = 0$$

$$3. u_{xx} + 4u_{yy} + 9u_{zz} + 4u_{xy} + 6u_{xz} + 12u_{yz} - 2u_x - 4u_y - 6u_z = 0$$

## №4

### Задача 1

Однородная бесконечная струна возбуждена начальным отклонением, имеющим

форму полуокружности  $u(x,0) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . Начальные скорости отсутствуют. Начертите положение струны для моментов времени  $t = 1/2$ ,  $t = 1$ ,  $t = 2$ , считая для простоты  $a = 1$ .

**Задача 2.**

Решить задачи Коши

a)  $u_{tt} = u_{xx}$   $u(x,0) = 1/(1+x^2)$ ,  $u_t(x,0) = 0$

b)  $u_{tt} = 2u_{xx}$   $u(x,0) = 0$ ,  $u_t(x,0) = xe^{-x^2/2}$

**№5**

Решить задачи:

$$u_{tt} = 16u_{xx};$$

1  $u|_{x=0} = u|_{x=8} = 0;$

$$u|_{t=0} = 31 \sin \pi x; \quad u_t|_{t=0} = 4\pi \sin \pi x.$$

$$u_{tt} = 9u_{xx};$$

2.1  $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2} = 0;$

$$u|_{t=0} = 8 \cos 4\pi x; \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

$$u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u;$$

3.1  $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0;$

$$u|_{t=0} = 10 \cos \frac{3x}{2}; \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

**№6**

1. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге  $0 \leq r < 6$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  :

$$\Delta u = 0$$

$$u(6, \varphi) = 7 \cos \varphi + 8 \sin 12\varphi$$

2. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга  $0 \leq r < 14$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  :

$$\Delta u = 0$$

$$u(14, \varphi) = 23 \cos 5\varphi + \sin 8\varphi$$

Критерии оценивания:

Оценка «отлично» выставляется если аспирант полностью и правильно решает поставленную перед ним задачу, математически грамотно обосновывает выбранный для решения способ и правильно интерпретирует полученный результат.

Оценка «хорошо» выставляется если аспирант не полностью и правильно решает

поставленную перед ним задачу и математически грамотно обосновывает выбранный для решения способ.

Оценка «удовлетворительно» выставляется если аспирант не полностью и правильно решает поставленную перед ним задачу.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется если аспирант не правильно решает поставленную перед ним задачу, не может обосновывает выбранный для решения способ и не может правильно интерпретировать полученный результат.

### 10.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации:

Дисциплина завершается зачетом с оценкой, на котором проверяется усвоение студентами основных понятий и свойств, а также их применение в решении поставленных математических задач в письменной – устной форме с решением задач.

#### Примерные практические задания:

1. Построить решение начально-краевой задачи при  $t \geq 0, 0 \leq x \leq b$ :

$$\begin{cases} u_{tt} = a u_{xx}, \\ u|_{t=0} = f(x), u|_{x=0} = g(t), u|_{x=b} = h(t), \\ f(0) = g(0), f(b) = h(0). \end{cases}$$

2. Построить решение начально-краевой задачи при  $t \geq 0, x \geq 0$ :

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \\ u|_{t=0} = 1, u|_{x=0} = g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

3. Построить решение начально-краевой задачи при  $t \geq 0, x \geq 0$ :

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u|_{t=0} = 1, u|_{x=0} = g(t), \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Оценка «отлично» выставляется если экзаменуемый знает основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, основные уравнения математической физики и классические задачи для них, понятие обобщенного решения задачи для уравнения с частными производными, владеет изученными методами решения задач и умеет решать задачи по дисциплине изученными методами и приводить анализ полученного решения; ставить задачи в обобщенной постановке для дифференциальных уравнений, самостоятельно изучать и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «отлично» или хорошо» в текущем контроле.

Оценка «хорошо» выставляется если экзаменуемый знает основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, и умеет решать задачи по дисциплине изученными методами и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «хорошо» или «удовлетворительно» в текущем контроле.

Оценка «удовлетворительно» выставляется если экзаменуемый знает основные понятия и определения, умеет понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «удовлетворительно» в текущем контроле.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется если экзаменуемый не знает основную терминологию по теме дисциплины, основные понятия и определения, основные уравнения математической физики и классические задачи для них, понятие обобщенного решения задачи для уравнения с частными производными, не владеет изученными методами решения задач и не умеет решать задачи по дисциплине изученными методами



и приводить анализ полученного решения; ставить задачи в обобщенной постановке для дифференциальных уравнений, самостоятельно изучать и понимать специальную (отраслевую) научную и методическую литературу, связанную с изучаемыми проблемами, а также имеет «неудовлетворительно» в текущем контроле.

Разработчики:

Профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений  
М.В.Фалалеев

Доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Е.А. Головки

**Лист согласования, дополнений и изменений  
на 2017/2018 учебный год**

К рабочей программе дисциплины Б1.В.ДВ.2.2 Уравнения математической физики и приложения

по направленности программы подготовки кадров высшей квалификации (программы аспирантуры): Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

В рабочую программу дисциплины вносятся следующие дополнения:

Нет дополнений

В рабочую программу дисциплины вносятся следующие изменения:

Нет изменений

Изменения одобрены Ученым советом института математики, экономики и информатики, протокол № 6 от 28.06.2017

Зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений



М.В. Фалалеев

**Лист согласования, дополнений и изменений  
на 2018/2019 учебный год**

К рабочей программе дисциплины Б1.В.ДВ.2.2 Уравнения математической физики и приложения

по направленности программы подготовки кадров высшей квалификации (программы аспирантуры): Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

В рабочую программу дисциплины вносятся следующие дополнения:

Нет дополнений

В рабочую программу дисциплины вносятся следующие изменения:

Нет изменений

Изменения одобрены Ученым советом института математики, экономики и информатики, протокол № 3 от 28.02.2018

Зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений



М.В. Фалалеев