МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ФГБОУ ВО «ИГУ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЭКОНОМИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

«Утверждаю»
Директор ИМЭИ ИГУ
_____ М. В. Фалалеев
«30» марта 2017 г.

Рабочая программа дисциплины (модуля)

Б1.Б.8 Математический анализ

Направление подготовки	01.03.01 Математика
Направленность (профиль)	Инновационная математика и компьютерные науки
Тип образовательной программы	академический бакалавриат
Квалификация (степень) выпускника	БАКАЛАВР
Форма обучения	очная

Иркутск 2017 г.

Содержание

		стр.
1.	Цели и задачи дисциплины	3
2.	Место дисциплины в структуре ОПОП.	3
3.	Требования к результатам освоения дисциплины	3
4.	Объем дисциплины и виды учебной работы	3-4
5.	Содержание дисциплины	4-9
	5.1 Содержание разделов и тем дисциплины	
	5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами	
	5.3 Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий	
6.	Перечень семинарских, практических занятий, лабораторных работ, план самостоятельной работы студентов, методические указания по организации самостоятельной работы студентов	9-13
7.	Примерная тематика курсовых работ (проектов) (при наличии)	13
8.	Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины:	14-15
	а) основная литература;	
	б) дополнительная литература;	
	в) программное обеспечение;	
	г) базы данных, поисково-справочные и информационные системы	
9.	Материально-техническое обеспечение дисциплины	15
10.	Образовательные технологии	15-16
11.	Оценочные средства (ОС)	16-45

1. Цели и задачи дисциплины: Целью преподавания дисциплины «Математический анализ» является формирование у будущих бакалавров базовых теоретических знаний математического анализа, отработка практических навыков в их использовании при решении модельных задач как теоретического типа, так и с практическим содержанием.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП: Дисциплина входит в базовую часть цикла обще-профессиональных дисциплин. Для изучения и освоения дисциплины нужны первоначальные знания из школьного курса математики. Знания и умения, приобретенные студентами в результате изучения дисциплины, будут использоваться при изучении следующих курсов: дифференциальные уравнения, теоретическая механика, физика, методы вычислений, метод оптимизации, функциональный анализ.

3. Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины (модуля) направлен на формирование следующих компетенций: ПК-2, ПК - 11.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основные понятия курса математического анализа.

Уметь: применять методы математического анализа к задачам разного типа.

Владеть: навыками самостоятельного приобретения и совершенствования методов решения поставленных задач.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы (разделяется по формам обучения)

Вид учебной работы	**Всего часов / зачетных единиц**	**Семестры**			
		1	2	3	4
Аудиторные занятия (всего)	448	90	160	90	108
В том числе:	-	-	-		-
Лекции	136	30	40	30	36
Практические занятия (ПЗ)	312	60	120	60	72
Семинары (С)					
Лабораторные работы (ЛР)					
Самостоятельная работа (всего)	556	116	118	116	206
В том числе:	-	-	-	-	-
Курсовой проект (работа)					
Расчетно-графические работы					
Контрольные работы	189	36	54	36	63
Другие виды самостоятельной работы	367	80	64	80	143
Контроль самостоятельной работы	40	10	10	10	10
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	экзамены	экзамен	экзамен	экзамен	экзамен

Контактная работа (всего)	488	100	170	100	118
Общая трудоемкость часы	1044	216	288	216	324
зачетные единицы	29	6	8	6	9

5. Содержание дисциплины

5.1. Содержание разделов и тем дисциплины. Все разделы и темы нумеруются

Раздел 1. Введение.

Тема 1.1. Аксиоматика множества действительных чисел.

Тема 1.2. Множества и операции над ними.

Тема 1.3. Принцип минимального элемента. Принцип математической индукции.

Тема 1.4. Модуль вещественного числа. Целая и дробная части числа. Плотность Q в R.

Тема 1.5. Верхние и нижние грани числовых множеств. Принцип вложенных отрезков.

Тема 1.6. Отображение, образ, прообраз, биекция.

Тема 1.7. Мощность множества. Счетные множества. Несчетность R. Плотность (R\Q) в R.

Раздел 2. Предел числовой последовательности.

Тема 2.1. Понятие предела последовательности. Единственность предела. Линейные свойства предела последовательности.

Тема 2.2. Свойства предела, связанные с неравенствами.

Тема 2.3. Необходимое условие сходимости последовательности. Теоремы о пределе произведения и частного сходящихся последовательностей.

Тема 2.4. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности. Число e. Теорема Штольца.

Тема 2.5. Подпоследовательности. Частичные пределы последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Тема 2.6. Критерий Коши сходимости числовых последовательностей.

Тема 2.7. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Раздел 3. Предел функции. Непрерывность функции.

Тема 3.1. Понятие предела функции в точке. Односторонние пределы.

Тема 3.2. Свойства предела функции.

Тема 3.3. Критерий Коши существования предела функции.

Тема 3.4. Замечательные пределы.

Тема 3.5. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Сравнение функций. O-символика. Эквивалентные функции.

Тема 3.6. Понятие непрерывности функции в точке (на множестве). Простейшие свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва и их классификация.

Тема 3.7. Глобальные свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши).

Тема 3.8. Понятие равномерной непрерывности функции.

Тема 3.9. Свойства замкнутых и открытых множеств. Компакт. Функции непрерывные на компакте.

Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Тема 4.1. Понятия дифференцируемости функции в точке, производной, дифференциала.

Тема 4.2. Уравнение касательной к графику функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Механический смысл производной.

Тема 4.3. Дифференцирование сложной и обратной функций. Инвариантность формы первого дифференциала.

Тема 4.4. правила дифференцирования.

Тема 4.5. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Тема 4.6. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о средних значениях).

Тема 4.7. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.

Тема 4.8. Признаки монотонности функции. Точки экстремума. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Тема 4.9. Выпуклость и точки перегиба. Асимптоты.

Тема 4.10. Правило Лопиталя.

Тема 4.11. Формула Тейлора.

Раздел 5. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана.

Тема 5.1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.

Тема 5.2. Основные методы интегрирования (замена переменной, интегрирование по частям).

Тема 5.3. Понятие определенного интеграла.

Тема 5.4. Суммы и интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости Римана.

Тема 5.5. Классы функций, интегрируемых по Риману.

Тема 5.6. Свойства определенного интеграла.

Тема 5.7. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Тема 5.8. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница.

Тема 5.9. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Тема 5.10. Теоремы о среднем для определенного интеграла.

Тема 5.11. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Интегральные неравенства.

Тема 5.12. Понятие несобственных интегралов 1-го и 2-го рода. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

Тема 5.13. Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов.

Тема 5.14. Замена переменных под знаком несобственного интеграла и формула интегрирования по частям. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Главное значение (в смысле Коши) несобственного интеграла.

Раздел 6. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана-Стилтьеса.

Тема 6.1. Функции ограниченной вариации.

Тема 6.2. Определение интеграла Стилтьеса и его свойства.

Тема 6.3. Существование и вычисление интеграла стилтьеса.

Раздел 7. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Тема 7.1. Непрерывность функции в R^n.

Тема 7.2. Дифференцируемые функции многих переменных. Дифференцирование сложных функций.

Тема 7.3. Производная по направлению. Градиент. Элементы дифференциальной геометрии.

Тема 7.4. Частные производные высших порядков.

Тема 7.5. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных.

Тема 7.6. Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Тема 7.7. Неявные функции. Теоремы о неявных функциях.

Тема 7.8. Условный экстремум функции многих переменных.

Раздел 8. Числовые ряды.

Тема 8.1. Понятие числового ряда, сходимости и расходимости числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов.

Тема 8.2. Критерий Коши сходимости (расходимости) числового ряда. Необходимый признак сходимости. Признак сравнения.

Тема 8.3. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки Даламбера, Коши, Раабе, интегральный признак, Куммера, Бертрана, Гаусса).

Тема 8.4. Знакочередующиеся ряды.

Тема 8.5. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Достаточные признаки абсолютной сходимости.

Тема 8.6. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Тема 8.7. Преобразование Абеля. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.

Раздел 9. Функциональные последовательности и ряды.

Тема 9.1. Понятие функциональной последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.

Тема 9.2. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

Тема 9.3. Понятие функционального ряда. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Тема 9.4. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Тема 9.5. Признаки Дирихле, Абеля и Чоунди-Джолиффе равномерной сходимости функциональных рядов.

Раздел 10. Степенные ряды.

Тема 10.1. Понятие степенного ряда. Область сходимости, радиус сходимости степенного ряда.

Тема 10.2. Свойства сходящихся степенных рядов.

Тема 10.3. Ряды Тейлора и Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд.

Тема 10.4. Теорема Вейерштрасса для степенных рядов. Теорема Арцела-Асколи.

Раздел 11. Интегралы, зависящие от параметра.

Тема 11.1. Равномерное по одной переменной (параметру) стремление функции двух переменных к пределу по другой переменной.

Тема 11.2. Свойства равномерного стремления функции к предельной.

Тема 11.3. Собственные интегралы, зависящие от параметра.

Тема 11.4. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши. Признаки Вейерштрасса, Дирихле, Абеля.

Тема 11.5. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра.

Тема 11.6. Интегралы Эйлера.

Раздел 12. Ряды Фурье и преобразование Фурье.

Тема 12.1. Ортонормированные системы евклидовых пространств и общие ряды Фурье.

Тема 12.2. Замкнутые и полные ортонормированные системы в евклидовых пространствах.

Тема 12.3. Теорема Вейерштрасса для периодических функций.

Тема 12.4. Замкнутость тригонометрической (классической) системы функций и следствия из нее.

Тема 12.5. Равномерная сходимость и почленное дифференцирование тригонометрических рядов.

Тема 12.6. Теорема Фейера о суммировании по Чезаро тригонометрических рядов Фурье.

Тема 12.7. Интеграл Фурье.

Тема 12.8. Преобразование Фурье и его свойства.

Раздел 13. Двойной интеграл.

Тема 13.1. Определение двойного интеграла для прямоугольной области. Необходимое условие интегрируемости.

Тема 13.2. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу и их свойства. Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу.

Тема 13.3. Критерии интегрируемости Дарбу и Римана. Классы функций, интегрируемых по Риману.

Тема 13.4. Определение двойного интеграла для произвольной области. Свойства двойного интеграла.

Тема 13.5. Сведение двойного интеграла к повторному.

Тема 13.6. Замена переменных в двукратном интеграле.

Раздел 14. Криволинейные и поверхностные интегралы.

Тема 14.1. Определение криволинейных интегралов первого и второго рода.

Тема 14.2. Поверхности в R^3. Поверхностные интегралы первого и второго рода.

Тема 14.3. Формула Грина.

Тема 14.4. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

Тема 14.5. Скалярные и векторные поля. Градиент, дивергенция, циркуляция, ротор (вихрь), поток.

Тема 14.6. Теорема Остроградского-Гаусса. Соленоидальные векторные поля.

Тема 14.7. Теорема Стокса. Потенциальные векторные поля.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№№ разделов и тем данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин
1.	Функциональный анализ	Раздел 3, 4, 6, 9, 12
2.	Физика	Раздел 4, 5, 7, 14
3.	Теоретическая механика	Раздел 4, 5, 14

4	Дифференциальные уравнения	Разделы 4, 5, 12
5	Численные методы	Раздел 4, 5, 10
6	Методы оптимизации	Раздел 7, Тема 7.6, 7.8
7	Комплексный анализ	Раздел 9, 10, 14

5.3. Разделы и темы дисциплин (модулей) и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела	Наименование темы	Виды занятий в часах					
			Лекц.	Практ. зан.	Семин	Лаб. зан.	СРС	Всего
1.	Раздел 1. Введение.	Темы 1.1. – 1.7.	6	12			10	28
2	Раздел 2. Предел числовой последовательности.	Темы 2.1 – 2.7.	6	12			20	38
3	Раздел 3. Предел функции. Непрерывность функции.	Темы 3.1 – 3.9.	8	16			20	44
4	Раздел 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.	Темы 4.1 – 4.11	10	20			30	60
5	Раздел 5. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана.	Темы 5.1 – 5.14	12	50			25	87
6	Раздел 6. Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана-Стилтьеса.	Темы 6.1 – 6.3.	6	12			14	32
7	Раздел 7. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.	Темы 7.1 – 7.8	22	58			25	105
8	Раздел 8. Числовые ряды.	Темы 8.1 – 8.7	8	16			25	49
9	Раздел 9. Функциональные последовательности и ряды.	Темы 9.1 – 9.5	8	16			25	49
10	Раздел 10. Степенные ряды.	Темы 10.1 – 10.4	4	10			10	24
11	Раздел 11. Интегралы, зависящие от параметра.	Темы 11.1 – 11.6	10	18			20	48
12	Раздел 12. Ряды Фурье и преобразование Фурье.	Темы 12.1 – 12.8	8	12			23	43
13	Раздел 13. Двойной интеграл.	Темы 13.1 – 13.6	14	30			60	104
14	Раздел 14. Криволинейные и поверхностные интегралы.	Темы 14.1 – 14.7	14	30			60	104

6. Перечень практических занятий

№ п/п	№ раздела и темы дисциплины (модуля)	Наименование семинаров, практических и лабораторных работ	Трудоемкость (час.)	Оценочные средства	Формируемые компетенции
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1.	Раздел 1, Тема 1.2	Алгебра логики. Исчисление предикатов.	2	Контрольная работа № 1	ПК-2, ПК - 11
2.	Раздел 1, Тема 1.2	Множества и операции над ними.	2	Контрольная работа № 1	ПК-2, ПК - 11
3.	Раздел 1, Тема 1.6	Отображения, функции, их классификация. Образ и прообраз множества при отображении, их свойства.	2	Контрольная работа № 1	ПК-2, ПК - 11
4.	Раздел 1, Тема 1.7	Понятие мощности множества. Счетные и несчетные множества.	2	Контрольная работа № 1	ПК-2, ПК - 11
5.	Раздел 1, Тема 1.3	Бинарные отношения на множествах. Отношение эквивалентности и порядка.	2	Контрольная работа № 1	ПК-2, ПК - 11
6.	Раздел 1, Темы 1.1, 1.5	Множество действительных чисел. Верхние и нижние грани числовых множеств.	2	Контрольная работа № 1	ПК-2, ПК - 11
7.	Раздел 2, Тема 2.1	Числовые последовательности. Ограниченные, монотонные числовые последовательности.	2	Контрольная работа № 2	ПК-2, ПК - 11
8.	Раздел 2, Тема 2.1	Предел числовой последовательности.	2	Контрольная работа № 2	ПК-2, ПК - 11
9.	Раздел 2, Темы 2.3, 2.7	Сходящиеся, бесконечно малые, бесконечно большие последовательности и их свойства.	2	Контрольная работа № 2	ПК-2, ПК - 11
10.	Раздел 2, Темы 2.4, 2.6	Критерий Коши сходимости числовой последовательности. Теорема Вейерштрасса.	2	Контрольная работа № 2	ПК-2, ПК - 11
11.	Раздел 2, Темы 2.2, 2.4	Число е. Предельный переход в неравенствах. Принцип двустороннего ограничения.	2	Контрольная работа № 2	ПК-2, ПК - 11
12.	Раздел 2, Тема 2.5	Подпоследовательности. Частичные пределы.	2	Контрольная работа № 2	ПК-2, ПК - 11
13.	Раздел 3, Темы 3.1, 3.2	Предел функции в точке. Методы раскрытия неопределенностей.	4	Контрольная работа № 3	ПК-2, ПК - 11
14.	Раздел 3, Тема 3.4	Первый и второй замечательные пределы.	2	Контрольная работа № 3	ПК-2, ПК - 11
15.	Раздел 3, Тема 3.5	О-символика. Эквивалентные бесконечно малые. Шкала бесконечно малых и бесконечно больших. Асимптоты.	4	Контрольная работа № 3	ПК-2, ПК - 11
16.	Раздел 3, Тема 3.6	Непрерывность функции в точке и классификация точек разрыва. Теорема о непрерывности элементарной функции.	4	Контрольная работа № 4	ПК-2, ПК - 11

17.	Раздел 3, Темы 3.8, 3.9	Равномерная непрерывность функции на множестве	2	Контрольная работа № 4	ПК-2, ПК - 11
18.	Раздел 4, Тема 4.1, 4.4	Дифференцируемость функции в точке, производная и дифференциал. Правила lифференцирования.	4	Контрольная работа № 5	ПК-2, ПК - 11
19.	Раздел 4, Темы 4.3	Дифференцируемость сложной, обратной, неявно заданной функций.	4	Контрольная работа № 5	ПК-2, ПК - 11
20.	Раздел 4, Тема 4.2	Геометрический и механический смыслы производной и дифференциала	2	Контрольная работа № 5	ПК-2, ПК - 11
21.	Раздел 4, Тема 4.10	Правило Лопиталя – Бернулли	2	Контрольная работа № 5	ПК-2, ПК - 11
22.	Раздел 4, Темы 4.5, 4.6, 4.8, 4.9	Полное исследование функции и построение ее графика	6	Контрольная работа № 6	ПК-2, ПК - 11
23.	Раздел 4, Тема 4.11	Локальная формула Тейлора	2	Экзаменационные билеты за I семестр	ПК-2, ПК - 11
24.	Раздел 5, Темы 5.1, 5.2	Основные методы неопределенного интегрирования	32	Контрольная работа № 7	ПК-2, ПК - 11
25.	Раздел 5, Темы 5.3 – 5.9	Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Замена переменных и интегрирование по частям.	6	Контрольная работа № 8	ПК-2, ПК - 11
26.	Раздел 5, Темы 5.12 – 5.14	Несобственные интегралы	6	Контрольная работа № 8	ПК-2, ПК - 11
27.	Раздел 5	Приложения определенного интеграла	6	Контрольная работа № 9	ПК-2, ПК - 11
28.	Раздел 6, Тема 6.1	Функции ограниченной вариации	4	Экзаменационные билеты за II семестр	ПК-2, ПК - 11
29.	Раздел 6, Тема 6.3	Вычисление интеграла Римана - Стилтьеса	6	Экзаменационные билеты за II семестр	ПК-2, ПК - 11
30.	Раздел 7, Тема 7.1	Функции нескольких переменных. Линии и поверхности уровня.	2	Экзаменационные билеты за II семестр	ПК-2, ПК - 11
31.	Раздел 7, Тема 7.1	Теорема о повторном и двойном пределах. Непрерывность функции по совокупности переменных.	4	Контрольная работа № 10	ПК-2, ПК - 11
32.	Раздел 7, Тема 7.2	Дифференцируемость функции нескольких переменных. Понятие частной производной и полного дифференциала. Дифференцирование сложных функций.	4	Контрольная работа № 10	ПК-2, ПК - 11

33.	Раздел 7, Тема 7.3	Производная по направлению. Градиент, его физический и геометрический смысл.	4	Контрольная работа № 11	ПК-2, ПК - 11
34.	Раздел 7, Тема 7.4	Производные и дифференциалы высших порядков	2	Контрольная работа № 10	ПК-2, ПК - 11
35.	Раздел 7, Тема 7.7	Теоремы о неявных функциях	6	Контрольная работа № 11	ПК-2, ПК - 11
36.	Раздел 7, Тема 7.6	Локальный экстремум функций нескольких переменных	4	Контрольная работа № 11	ПК-2, ПК - 11
37.	Раздел 7, Тема 7.8	Условный экстремум функции нескольких переменных	26	Контрольная работа № 11	ПК-2, ПК - 11
38.	Раздел 8, Темы 8.1 – 8.3	Сходимость и расходимость числовых рядов. Критерий Коши.	2	Контрольная работа № 12	ПК-2, ПК - 11
39.	Раздел 8 Тема 8.3	Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами	5	Контрольная работа № 12	ПК-2, ПК - 11
40.	Раздел 8, Тема 8.5	Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов. Признаки Лейбница, Дирихле и Абеля.	5	Контрольная работа № 12	ПК-2, ПК - 11
41.	Раздел 9, Тема 9.3	Область сходимости функционального ряда.	4	Контрольная работа № 13	ПК-2, ПК - 11
42.	Раздел 9, Тема 9.1	Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Критерий Коши, супремум-критерий.	4	Контрольная работа № 13	ПК-2, ПК - 11
43.	Раздел 9, Тема 9.3, 9.5	Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши. Признаки Вейерштрасса, Дирихле, Абеля.	4	Контрольная работа № 13	ПК-2, ПК - 11
44.	Раздел 9, Темы 9.2 и 9.4	Свойства равномерно сходящихся рядов и последовательностей	2	Контрольная работа № 13	ПК-2, ПК - 11
45.	Раздел 10, Темы 10.1	Степенной ряд. Область сходимости и радиус сходимости степенного ряда	2	Контрольная работа № 13	ПК-2, ПК - 11
46.	Раздел 10, Тема 10.2	Ряды Тейлора и Маклорена. Почленное дифференцирование и интегрирование. Приближенные вычисления.	6	Контрольная работа № 13	ПК-2, ПК - 11
47.	Раздел 11, Темы 11.1 – 11.3	Собственные интегралы, зависящие от параметра	4	Контрольная работа № 14	ПК-2, ПК - 11
48.	Раздел 11, Тема 11.4	Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость.	4	Контрольная работа № 14	ПК-2, ПК - 11
49.	Раздел 11, Тема 11.5	Свойства равномерно сходящихся интегралов, зависящих от параметра.	2	Контрольная работа № 14	ПК-2, ПК - 11
50.	Раздел 11, Тема 11.6	Интегралы Эйлера.	4	Контрольная работа № 14	ПК-2, ПК - 11

51.	Раздел 12, Тема 12.4, 12.5	Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье. Равенство Парсеваля – Стеклова.	4	Контрольная работа № 15	ПК-2, ПК - 11
52.	Раздел 12, Тема 12.7	Интеграл Фурье	3	Контрольная работа № 15	ПК-2, ПК - 11
53.	Раздел 12, Тема 12.8	Преобразование Фурье	3	Контрольная работа № 15	ПК-2, ПК - 11
54.	Раздел 13, Темы 13.1-13.5	Двойной интеграл. Теорема Фубини.	4	Контрольная работа № 16	ПК-2, ПК - 11
55.	Раздел 13 Тема 13.6	Замена в двойном интеграле. Переход в полярные координаты.	6	Контрольная работа № 16	ПК-2, ПК - 11
56.	Раздел 13	Геометрические и механические приложения двойного интеграла.	8	Контрольная работа № 16	ПК-2, ПК - 11
57.	Раздел 13	Тройной интеграл. Замена в тройном интеграле. Переход в сферическую и цилиндрическую системы координат.	8	Контрольная работа № 16	ПК-2, ПК - 11
58.	Раздел 13	Геометрические и механические приложения тройного интеграла.	6	Контрольная работа № 16	ПК-2, ПК - 11
59.	Раздел 14, Тема 14.1	Криволинейный интеграл первого рода и его приложения.	4	Контрольная работа № 17	ПК-2, ПК - 11
60.	Раздел 14, Тема 14.1	Криволинейный интеграл второго рода и его приложения.	4	Контрольная работа № 17	ПК-2, ПК - 11
61.	Раздел 14, Тема 14.2	Поверхностный интеграл первого рода и его приложения.	4	Контрольная работа № 17	ПК-2, ПК - 11
62.	Раздел 14, Тема 14.2	Поверхностный интеграл второго рода и его приложения.	4	Контрольная работа № 17	ПК-2, ПК - 11
63.	Раздел 14, Тема 14.4, 14.6, 14.7	Формулы Грина, Стокса, Гаусса – Остроградского.	6	Контрольная работа № 18	ПК-2, ПК - 11
64.	Раздел 14, Тема 14.5	Скалярные и векторные поля. Оператор Гамильтона. Градиент, дивергенция, ротор. Векторные линии, поток и циркуляция векторного поля.	6	Контрольная работа № 18	ПК-2, ПК - 11
65.	Раздел 14, Тема 14.6, 14.7	Соленоидальные и потенциальные векторные поля. Необходимые и достаточные условия соленоидальности и потенциальности. Теорема о разложении векторного поля на потенциальную и соленоидальную составляющие.	4	Контрольная работа № 18	ПК-2, ПК - 11

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ нед.	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
1.	Раздел 1	Контрольная работа № 1	Решение задач		6
2	Раздел 2	Контрольная работа № 2	Решение задач		6
3.	Раздел 3, Темы 3.1 – 3.5	Контрольная работа № 3	Решение задач		6
4.	Раздел 3, Темы 3.6 – 3.8	Контрольная работа № 4	Решение задач		6
5.	Раздел 4, Темы 4.1 – 4.6, 4.10	Контрольная работа № 5	Решение задач		6
6.	Раздел 4, Темы 4.8 – 4.9	Контрольная работа № 6	Решение задач		6
7.	Раздел 5, Темы 5.1 – 5.2	Контрольная работа № 7	Решение задач		11
8.	Раздел 5, Темы 5.3 – 5.13	Контрольная работа № 8	Решение задач		11
9.	Раздел 5	Контрольная работа № 9	Решение задач		11
10.	Раздел 7, Тема 7.1, 7.2, 7.4	Контрольная работа № 10	Решение задач		11
11.	Раздел 7, Темы 7.3, 7.6-7.8	Контрольная работа № 11	Решение задач		10
12.	Раздел 8	Контрольная работа № 12	Решение задач		12
13.	Разделы 9 – 10	Контрольная работа № 13	Решение задач		12
14.	Раздел 11	Контрольная работа № 14	Решение задач		12
15.	Раздел 12	Контрольная работа № 15	Решение задач		9
16.	Раздел 13	Контрольная работа № 16	Решение задач		18
17.	Раздел 14, Темы 14.1 – 14.2	Контрольная работа № 17	Решение задач		18
18.	Раздел 14, Темы 14.3 – 14.7	Контрольная работа № 18	Решение задач		18

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Подготовка к контрольной работе включает в себя изучение полученного теоретического материала и получение навыков по применению к решению типовых задач, выполнение домашних заданий.

7. Примерная тематика курсовых работ (проектов) (при наличии)

Учебным планом не предусмотрены

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля):

а) основная литература

1. **Демидович, Борис Павлович.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. - М. : АСТ : Астрель, 2009. - 558 с. - **ISBN** 978-5-17-010062-0. 10 экз.

2. **Ильин, Владимир Александрович.** Математический анализ: учеб. для бакалавров вузов с углублен. изучением мат. анализа и для спец. мех.-мат. фак. ун-тов : [в 2 т.] / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. - 4-е изд. - М. : Юрайт, 2013. **Ч. 1.** - 2013. - 357 с. - **ISBN** 978-5-9916-2733-7. Экз. 26.

3. **Зорич, Владимир Антонович.** Математический анализ: учеб. для студ. мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов / В. А. Зорич. - 5-е изд. - М. : Изд-во МЦНМО, 2007 - ISBN 5-94057-055-0. **Ч.1.** - 2007. - 657 с. - **ISBN** 5-94057-056-9. 50 экз.

4. **Зорич, Владимир Антонович.** Математический анализ: учеб. для студ. мат. и физ.-мат. фак. и спец. вузов / В. А. Зорич. - 5-е изд. - М. : Изд-во МЦНМО - ISBN 5-94057-055-0. **Ч.2.** - 2007. - 789 с. - **ISBN** 5-94057-057-7. 50 экз.

5. **Будаев, Виктор Дмитриевич.** Математический анализ: учебник / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон. - Москва : Лань, 2012. - 544 с. : ил. ; 22 см. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - **ISBN** 978-5-8114-1186-3

6. **Горлач, Б. А.** Математический анализ / Б. А. Горлач. - Москва : Лань, 2013. - Режим доступа: ЭБС "Издательство "Лань". - Неогранич. доступ. - **ISBN** 978-5-8114-1428-4

б) дополнительная литература

1. **Ильин, Владимир Александрович.** Математический анализ: учеб. для студ. вузов: В 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов ; Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект ; М. : Изд-во МГУ : ТК Велби, 2006 - **Ч. 2.** - 2006. - 357 с. - **ISBN** 5-482-00444-9 . 10 экз.

2. **Математический анализ** : учеб. пособие для бакалавров, для студ. вузов / А. М. Кытманов. - ЭВК. - М. : Юрайт, 2012. - (Бакалавр. Базовый курс). - Режим доступа: ЭЧЗ "Библиотех". - Неогранич. доступ. - **ISBN** 978-5-9916-1810-6.

3. **Фалалеев, Михаил Валентинович.** Математический анализ : учеб. пособие для студ. вузов. обуч. по напр. подгот. "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Информационная безопасность": в 4 ч. / М. В. Фалалеев ; рец.: Н. А. Сидоров, А. А. Щеглова ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т мат., эконом. и информ. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. - ISBN 978-5-9624-0822-4. **Ч. 1.** - 2013. - 177 с. - **ISBN** 978-5-9624-0822-4. 51 экз.

4. **Фалалеев, Михаил Валентинович.** Математический анализ : учеб. пособие для студ. вузов. обуч. по напр. подгот. "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Информационная безопасность": в 4 ч. / М. В. Фалалеев ; рец.: Н. А. Сидоров, А. А. Щеглова ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т мат., эконом. и информ. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. - ISBN 978-5-9624-0822-4. **Ч. 2.** - 2013. - 139 с. - **ISBN** 978-5-9624-0824-8. 51 экз.

5. **Фалалеев, Михаил Валентинович.** Математический анализ : учеб. пособие для студ. вузов. обуч. по напр. подгот. "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Информационная безопасность": в 4 ч. / М. В. Фалалеев ; рец.: Н. А. Сидоров, А. А. Щеглова ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т мат., эконом. и информ. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. - ISBN 978-5-9624-0822-4. **Ч. 3.** - 2013. - 154 с. - **ISBN** 978-5-9624-0825-5. 51 экз.

6. **Фалалеев, Михаил Валентинович.** Математический анализ : учеб. пособие для студ. вузов. обуч. по напр. подгот. "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Информационная безопасность": в 4 ч. / М. В. Фалалеев ; рец.: Н. А. Сидоров, А. А. Щеглова ; Иркутский гос. ун-т, Ин-т мат., эконом. и информ. - Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. - ISBN 978-5-9624-0822-4. **Ч. 4.** - 2013. - 113 с. - **ISBN** 978-5-9624-0826-2. 51 экз.

в) программное обеспечение:
Microsoft Windows 7 Pro
Microsoft Office 2007 (Номер Лицензии Microsoft 42095516 от 27.04.2007, бессрочно).
Браузер Google Chrome; Браузер Mozilia Firefox

г) базы данных, информационно-справочные и поисковые системы
https://isu.bibliotech.ru/
http://e.lanbook.com
http://rucont.ru/
http://ibooks.ru/
http://e-library.ru/
http://educa.isu.ru/

9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля):

Аудитория на 60 рабочих мест, оборудованная специализированной (учебной) мебелью; доска для мела, оборудованием для презентации учебного материала: стационарный проектор Casio XJ-V1, XGA1024*768; ноутбук ASUS X51L Intel Celeron 560,

Аудитория, на 20 рабочих мест, оборудованная специализированной мебелью (парты, настенная магнитно-меловая, одноэлементная – 1 шт., стол, стул) и техническими средствами обучения (мобильный проектор Epson EB-X12, XGA1024*768)

Аудитория, оборудованная учебной мебелью на 25 посадочных мест с компьютерами: моноблок Hewlett-Packard DualCore Intel Core i3-3240, 3.40 GHz (25 шт.); с неограниченным доступом к сети интернет, доска для маркеров; мобильный проектор Epson EB-X12, XGA1024*768

10. Образовательные технологии:

При реализации данной программы применяются инновационные технологии обучения, активные и интерактивные формы проведения занятий.

1. ***Дискуссия*** (от лат. discussio — исследование, рассмотрение) — это всестороннее обсуждение спорного вопроса в публичном собрании, в частной беседе, споре. Другими словами, дискуссия заключается в коллективном обсуждении какого-либо вопроса, проблемы или сопоставлении информации, идей, мнений, предложений. Цели проведения дискуссии могут быть очень разнообразными: обучение, тренинг, диагностика, преобразование, изменение установок, стимулирование творчества и др.

Методика «вопрос – ответ». Данная методика – это разновидность простого собеседования; отличие состоит в том, что применяется определённая форма постановки вопросов для собеседования с участниками дискуссии-диалога.

2. ***Метод мозгового штурма*** (мозговая атака, braine storming) — оперативный метод решения проблемы на основе стимулирования творческой активности, при котором участникам обсуждения предлагают высказывать как можно большее количество вариантов решения, в том числе самых фантастичных. Затем из общего числа высказанных идей отбирают наиболее удачные, которые могут быть использованы на практике.

(Мозговой штурм — один из наиболее популярных методов стимулирования творческой активности. Широко используется во многих организациях для поиска нетрадиционных решений самых разнообразных задач.

Используется при тупиковых или проблемных ситуациях.

Сущность метода заключается в том, что процесс выдвижения, предложения идей отделен от процесса их критической оценки и отбора. Кроме того, используются разнообразные приемы "включения" фантазии, для лучшего использования "чисто человеческого" потенциала в поиске решений. Например, иногда используется привлечение неспециалистов, которые могут благодаря неосведомленности сделать "безумные" предложения, которые в свою очередь стимулируют воображение

"специалистов".)

Цель мозгового штурма – создать новые идеи, получить лучшую идею или лучшее решение, а так же поиск как можно более широкого спектра направлений решения задачи.

Основной задачей метода мозгового штурма является выработка (генерирование) возможно большего количества и максимально разнообразных по качеству идей, пригодных для решения поставленной проблемы.

3. ***Мастер–класс*** – это главное средство передачи концептуальной новой идеи своей (авторской) педагогической системы. Преподаватель как профессионал на протяжении ряда лет вырабатывает индивидуальную (авторскую) методическую систему, включающую целеполагание, проектирование, использование последовательности ряда известных дидактических и воспитательных методик, занятий, мероприятий, собственные «ноу-хау», учитывает реальные условия работы с различными категориями учащихся и т.п.

Форма работы мастер-класса зависит от наработанного мастером стиля своей профессиональной деятельности, который, в конечном итоге, и задает на мастер-классе изначальную точку отсчета в построении общей схемы проведения этого интереснейшего мероприятия. Мастер-классы способствуют личностной ориентации студента, формированию его художественных вкусов и культурных интересов, вводят молодого человека в мир гуманитарной культуры.

Целью проведения мастер-класса является профессиональное, интеллектуальное и эстетическое воспитание студента.

В это понятие вкладывается, прежде всего, развитие в ходе мастер-класса способности студента самостоятельно и нестандартно мыслить. В контексте мастер-класса профессиональное мастерство означает прежде всего умение быстро и качественно решать образовательную задачу в практическом поле выбранного предмета

Задачами являются: передача продуктивных способов работы - прием, метод, методика или технология; адекватные формы и способы представления своего опыта.

11. Оценочные средства (ОС):

11.1. Оценочные средства для входного контроля.

Входной контроль при изучении данной дисциплины не предусматривается.

11.2. Оценочные средства текущего контроля

№ п\п	Вид контроля (текущие контрольные работы)	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Контрольная работа «Элементы теории множеств»	Раздел 1	
2	Контрольная работа «Предел числовой последовательности»	Раздел 2	
3	Контрольная работа «Предел функции в точке. О-символика»	Раздел 3, Темы 3.1 – 3.5	
4	Контрольная работа «Непрерывность функции. Классификация точек разрыва. Равномерная непрерывность»	Раздел 3, Темы 3.6 – 3.8	
5	Контрольная работа «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»	Раздел 4, Темы 4.1 – 4.6, 4.10	
6	Контрольная работа «Полное исследование функций и построение их графиков»	Раздел 4, Темы 4.8 – 4.9	
7	Контрольная работа «Основные методы неопределенного интегрирования»	Раздел 5, Темы 5.1 – 5.2	
8	Контрольная работа «Основные теоремы	Раздел 5, Темы	

	интегрального исчисления. Несобственные интегралы»	5.3 – 5.13	ПК-2, ПК - 11
9	Контрольная работа «Приложения определенного интеграла»	Раздел 5	
10	Контрольная работа «Функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость»	Раздел 7, Тема 7.1, 7.2, 7.4	
11	Контрольная работа «Геометрический и механический смыслы градиента. Теорема о неявной функции. Условный и безусловный экстремум функций нескольких переменных»	Раздел 7, Темы 7.3, 7.6-7.8	
12	Контрольная работа «Сходимость числовых рядов»	Раздел 8	
13	Контрольная работа «Функциональные ряды и последовательности»	Разделы 9 – 10	
14	Контрольная работа «Интегралы, зависящие от параметра»	Раздел 11	
15	Контрольная работа «Ряды, интегралы и преобразование Фурье»	Раздел 11	
16	Контрольная работа «Кратные интегралы и их приложения»	Раздел 13	
17	Контрольная работа «Криволинейные и поверхностные интегралы и их приложения»	Раздел 14, Темы 14.1 – 14.2	
18	Контрольная работа «Элементы теории поля»	Раздел 14, Темы 14.3 – 14.7	

11.3. Оценочные средства для промежуточной аттестации в форме экзамена

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Экзамен за 1 семестр	Разделы 1 – 4	ПК-2, ПК - 11
2	Экзамен за 2 семестр	Разделы 5 – 7	
3	Экзамен за 3 семестр	Разделы 8 – 12	
4	Экзамен за 4 семестр	Разделы 12 – 14	

Варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1
«Элементы теории множеств»

Вариант 1

1. Доказать, что множества четных и нечетных чисел – счетные.
2. Дана функция $f : Z^2 \to Z^2$, $f : (m, n) \to (m+n, m-n)$. Является ли f инъекцией, сюръекцией или биекцией?
3. Доказать равенство: $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$.

Вариант 2

1. Доказать, что множество конечных подмножеств счетного множества является счетным множеством.

2. Установить биекцию между $[0,1)$ и $[1,+\infty)$.

3. Доказать, что множество А бесконечно тогда и только тогда, когда оно эквивалентно некоторому своему собственному подмножеству.

Вариант 3

1. Определить мощность множества иррациональных алгебраических чисел.
2. Установить биекцию между отрезками R и $[0,+\infty)$.
3. Доказать равенство: $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$.

Контрольная работа № 2
«Предел числовой последовательности»

Вариант 1

1. Может ли последовательность иметь бесконечно много отрицательных членов, если она сходится к положительному числу?

а) да; б) нет; в) не всегда.

2. Если последовательность неограниченна, то она является

а) бесконечно большой; б) бесконечно малой; в) расходящейся.

3. Последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся к числу x, если

а) в любой окрестности точки x находится бесконечно много членов последовательности;

б) вне любой окрестности точки x находится не более конечного числа членов последовательности;

в) в любой окрестности точки x находится не более конечного числа членов последовательности.

4. Бесконечно малая последовательность

а) сходится; б) расходится; в) может быть как сходящейся, так и расходящейся.

5. Если последовательность сходится, то она

а) ограничена; б) бесконечно малая; в) неограниченна.

6. Выбрать пропущенные слова-знаки в порядке их следования:
«Число x не является пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\ldots\varepsilon > 0 \ldots$ *натуральное число* $N \ldots n > N$ выполняется неравенство $|x_n - x| \ldots \varepsilon$»

а) $\forall, \forall, \exists, \geq$; б) $\forall, \exists, \forall, <$; в) $\exists, \forall, \exists, \geq$.

7. Вставить пропущенные слова в предложении «Последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу x … ее можно представить в виде: $x_n = x + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая».

а) тогда; б) если; в) тогда и только тогда, когда.

8. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является

а) ограниченной; б) бесконечно малой; в) сходящейся к числу $x \neq 0$.

9. Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt{n^2+12} - \sqrt{n^2-3}$ бесконечно малая.

10. Доказать, что последовательность $x_n = 6n^2 + n^3$ неограниченна.

11. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{2n}\right)^3=\frac{1}{8}$.

12. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{6^n+3^n-4n^4}$.

13. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{arctg\, n^3}{3\sqrt{n+1}}$.

14. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n^3+3)^2-(2n^3-1)^2}{3n^3+2n-2}$.

Вариант 2

1. Может ли последовательность иметь бесконечно много положительных членов, если она сходится к отрицательному числу?

а) нет; б) да; в) не всегда.

2. Выбрать неверное утверждение. «Если две последовательности являются бесконечно малыми, то бесконечно малой будет и

а) сумма этих последовательностей; б) частное этих последовательностей;

в) произведение этих последовательностей.

3. Последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся к числу x, если

а) в любой окрестности точки x находится бесконечно много членов последовательности;

б) вне любой окрестности точки x находится не более конечного числа членов последовательности;

в) в любой окрестности точки x находится не более конечного числа членов последовательности.

4. Любая убывающая последовательность

а) ограничена; б) ограничена сверху; в) ограничена снизу

5. Если последовательность сходится, то она

а) ограничена; б) бесконечно малая; в) неограниченна.

6. Выбрать пропущенные слова-знаки в порядке их следования:

« $\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\right)\Leftrightarrow\left(\ldots\varepsilon>0\ldots N_\varepsilon:\ldots n>N_\varepsilon$ *выполняется* $|x_n-x|\ldots\varepsilon\right)$»

а) $\forall,\ \forall,\ \exists,\ \geq$; б) $\forall,\ \exists,\ \forall,\ <$; в) $\exists,\ \forall,\ \exists,\ <$.

7. Выбрать верное утверждение:

а) любая возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится;

б) любая возрастающая ограниченная снизу последовательность сходится;

в) любая убывающая ограниченная сверху последовательность сходится;

8. Пусть $\{x_n\}$ сходится к числу x и $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая, тогда $\{x_n\cdot\alpha_n\}$

а) ограниченная; б) бесконечно малая; в) расходится

9. Доказать, что последовательность $x_n=(2^n+1)/(3^n+1)$ ограничена.

10. Доказать, что последовательность $x_n=\sqrt{n^2+2n}$ бесконечно большая.

11. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+10}{2n^2-1}=\frac{1}{2}$.

12. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n\cos^2 n^2}}{n\sqrt{n+1}}$.

13. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} 9n\left(\sqrt{3n^4+5n}-\sqrt{3n^4-4n}\right)$.

14. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7n^5+12}$.

Вариант 3

1. Пусть в некоторой окрестности точки x находится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Следует ли из этого, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$?

а) нет; б) да; в) не уверен(а).

2. Выбрать неверное утверждение. «Если две последовательности являются бесконечно малыми, то бесконечно малой будет и

а) сумма этих последовательностей;

б) частное этих последовательностей;

в) произведение этих последовательностей.

3. Бесконечно большая последовательность

а) сходится; б) расходится; в) может быть как сходящейся, так и расходящейся.

4. Любая возрастающая последовательность

а) ограничена; б) ограничена сверху; в) ограничена снизу.

5. Последовательность называется неограниченной, если

а) $\forall C>0\ \forall n\in N\ |x_n|>C$; б) $\exists C>0\ \forall n\in N\ |x_n|>C$;

в) $\forall C>0\ \exists n\in N:\ |x_n|>C$

6. Выбрать пропущенные слова-знаки в порядке их следования:

« $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq x\right) \Leftrightarrow (\ldots \varepsilon>0 \ldots N\ \ldots\ n>N$ *выполняется* $|x_n - x| \ldots \varepsilon)$»

а) $\forall,\ \forall,\ \exists,\ \geq$; б) $\forall,\ \exists,\ \forall,\ <$; в) $\exists,\ \forall,\ \exists,\ \geq$.

7. Выбрать неверное утверждение.

а) любая возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится;

б) любая возрастающая ограниченная снизу последовательность сходится;

в) любая убывающая ограниченная последовательность сходится.

8. Пусть $\{x_n\}$ сходится к числу $x\neq 0$ и $\{y_n\}$ - бесконечно большая, тогда $\{x_n\cdot y_n\}$

а) ограниченная; б) бесконечно большая; в) сходящаяся

9. Доказать, что последовательность $x_n=(2n+1)/(3n+1)$ ограничена.

10. Доказать, что последовательность $x_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ бесконечно малая.

11. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{2n^2-1}=0$.

12. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin 2n}{n\sqrt{n+1}}$.

13. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2-n}\right)$.

14. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}$.

Контрольная работа № 3
«Предел функции в точке. О-символика»

Вариант 1

1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln x = 0$.

2. Доказать, что $O(o(f)) = o(f)$ при $x \to x_0$.

3. Найти а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+ctgx)^{tgx}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}-\sqrt[7]{1+\frac{7}{x}}}{1-\sqrt[3]{1+\frac{6}{x}}}$.

4. Выделить главный член $A\alpha^n(x)$ б. м. (б. б.) функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ относительно б. м. (б. б.) $\alpha(x)$ и определить порядок малости (роста). Записать соответствующее асимптотическое разложение, если

$$f(x)=\log_x 2,\ x_0=1,\ \alpha(x)=\frac{1}{x-1}.$$

Вариант 2

1. Доказать, что не существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\{x\}$.

2. Доказать, что $O(f)+o(f)=O(f)$ при $x\to x_0$.

3. Найти а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln\cos(\pi 2^x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)-\sin^2 x+arctgx}{\ln chx}$.

4. Выделить главный член $A\alpha^n(x)$ б. м. (б. б.) функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ относительно б. м. (б. б.) $\alpha(x)$ и определить порядок малости (роста). Записать соответствующее асимптотическое разложение, если

$$f(x)=(\sqrt{1-2x}-1)ctg^2x^3,\ x_0=0,\ \alpha(x)=\frac{1}{x}.$$

Вариант 3

1. Доказать, что не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx=\dfrac{\pi}{2}$.

2. Доказать, что $o(x^n)+o(x^k)=o(x^k)$, при $x\to\infty$ $n,k\in N$, $k\ge n$.

3. Найти а) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x^2-e^{-x^2}+1}{\log_5(1+4x^2)}$.

4. Выделить главный член $A\alpha^n(x)$ б. м. (б. б.) функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ относительно б. м. (б. б.) $\alpha(x)$ и определить порядок малости (роста). Записать соответствующее асимптотическое разложение, если

$$f(x)=\sin(\sqrt{x^2+9}-3),\ x_0=0,\ \alpha(x)=x.$$

Контрольная работа № 4

«Непрерывность функции. Классификация точек разрыва. Равномерная непрерывность»

Вариант 1

1. Исследовать функцию $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ на непрерывность.

2. При каких значениях параметра A функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0.\end{cases}$$

непрерывна на всей числовой прямой.

3. Исследовать функцию $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ на равномерную непрерывность на множестве $[0;\ 1]$.

4. Существует ли непрерывная на интервале $(-1;\ 1)$ функция $y=f(x)$, отображающая $(-1;\ 1)$ на $(1\ +\infty)$? Ответ обоснуйте.

5. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$.

Вариант 2

1. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$ на непрерывность.

2. При каких значениях параметра A функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x^2}-1}{x^2}, & x\neq 0,\\ A, & x=0.\end{cases}$$

непрерывна на всей числовой прямой.

3. Исследовать функцию $y=\sqrt{x}$ на равномерную непрерывность на множестве $[1;\ +\infty)$.

4. Существует ли непрерывная на интервале $(a\ \ b)$ функция $y=f(x)$, отображающая $(a\ \ b)$ на $[0;\ 1]\cup[3;\ 4]$? Ответ обоснуйте.

5. Найти асимптоты и построить график функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$.

Вариант 3

1. Исследовать функцию $f(x)=arctg\dfrac{1}{x}$ на непрерывность.

2. При каких значениях параметра A функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-3^{x^2}}{x^2}, & x\neq 0,\\ A, & x=0.\end{cases}$$

непрерывна на всей числовой прямой.

3. Исследовать функцию $y=arctgx$ на равномерную непрерывность на множестве R.

4. Существует ли непрерывная на отрезке $[0;\ 1]$ функция $y=f(x)$, отображающая $[0;\ 1]$ на R? Ответ обоснуйте.

5. Найти асимптоты и построить график функции $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

Контрольная работа № 5

«Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

Вариант 1

1. Найти производную функции $y=\frac{x}{9}+\frac{25}{1-x}$

2. Найти производную функции $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

3. Найти $d\left(\frac{x^2 2^x}{x^x}\right)$ в точке $x=2.$

4. Определить α и β, при которых непрерывна и дифференцируема функция

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta, & x\le 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$$

5. Найти производную $y'(x)$ функции $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ в точке $t=\frac{\pi}{2}.$

Вариант 2

1. Найти производную функции $y=\frac{1}{4-x^2}.$

2. Найти производную функции $y=x\sqrt{(x-1)^3}.$

3. Найти $d\left(arctg\frac{\ln x}{x}\right)$ в точке $x=\frac{1}{e}.$

4. Определить α и β, при которых непрерывна и дифференцируема функция

$$f(x)=\begin{cases}2x+2, & x<-1,\\ \alpha(x+1)(x-1)(x-\beta), & -1\le x\le 1,\\ 3x-3, & x>1.\end{cases}$$

5. Найти производную $y'(x)$ функции $\begin{cases}x=\frac{3t}{t^3+1}\\ y=\frac{3t^2}{t^3+1}\end{cases}$ в точке $t=0.$

Вариант 3

1. Найти производную функции $y=\frac{1}{1-x^2}.$

2. Найти производную функции $y=(1-x)^2 e^{3x-1}$

3. Найти $d\left(\ln\left(\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{2\cos x-1}\right)\right)$ в точке $x=\frac{\pi}{3}.$

4. Определить α и β, при которых непрерывна и дифференцируема функция

$$f(x)=\begin{cases}arctg\,\alpha x+2, & x\le -1,\\ \beta+\frac{x+1}{2}, & x>-1.\end{cases}$$

5. Найти производную $y'(x)$ функции $\begin{cases}x=(t-1)^2(t-2)\\ y=(t-1)^2(t-3)\end{cases}$ в точке $t=3.$

Контрольная работа № 6
«Полное исследование функций и построение их графиков»

Вариант 1

Построить графики функций с полным исследованием

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$
2. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
3. $\begin{cases} x = 2cos2t \\ y = 2cos3t \end{cases}$
4. $(x^2 + y^2 - x)^2 = 4(x^2 + y^2)$

Вариант 2

Построить графики функций с полным исследованием

1. $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$
2. $y = \frac{lnx}{x}$
3. $\begin{cases} x = \frac{2t}{1-t^2} \\ y = \frac{t^2}{1-t^2} \end{cases}$
4. $y = x(x^2 + y^2)$

Вариант 3

Построить графики функций с полным исследованием

1. $y = \frac{x^3}{x^2-4}$
2. $y = x^3 e^{-3x}$
3. $\begin{cases} x = t \cdot ln(t+1) \\ y = t \cdot lnt \end{cases}$
4. $r = 2sin4\varphi$

Контрольная работа № 7
«Основные методы неопределенного интегрирования»

Вариант 1

Найти

1) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$; 2) $\int \frac{arctge^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}dx$; 3) $\int \frac{dx}{x^3-1}$; 4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$; 5) $\int \frac{dx}{sh^2 x ch^2 x}$;

6) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$.

Вариант 2

Найти

1) $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$; 3) $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx$; 4) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$; 5) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$;
6) $\int \frac{x\,ctg^2 x^2}{\sin^2 x^2}dx$.

Вариант 3

Найти
1) $\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$; 3) $\int \frac{dx}{x^3+1}$; 4) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$; 5) $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;
6) $\int x^2 e^{x^3}dx$.

Контрольная работа № 8
«Основные теоремы интегрального исчисления. Несобственные интегралы»

Вариант 1

1. Для функции $f(x)=\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$ найти первообразную, проходящую через точку $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

2. Найти а) $\int_0^{\frac{1}{2}} x\arccos x dx$, б) $\int_1^3 \max\left\{4-x^2; 2\right\}dx$

3. Найти $\int_0^{\pi} \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)}$ и $\int_0^{+\infty} \frac{arctgx\sin x\,dx}{x^2\sqrt{x}}$.

5. Найти $\frac{d}{dy}\int_{2y}^{y^2} \frac{x}{\ln x}dx$.

Вариант 2

1. Для функции $f(x)=\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$ найти первообразную, проходящую через точку $(0, 0)$.

2. Найти а) $\int_0^1 x^2 \arcsin x\,dx$, б) $\int_{-1}^2 e^{-|x|}dx$.

3. Найти $\int_0^1 \frac{(6x-1)dx}{\sqrt{3-4x^2+8x}}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x\ln^2 x}$ и $\int_0^{+\infty} \frac{arctg\,3x\cdot\cos 2x\,dx}{\sqrt{x}}$.

5. Найти $\frac{d}{dt}\int_{\sqrt{t}}^{2t} \cos x^2\,dx$.

Вариант 3

1. Для функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}$ найти первообразную, проходящую через точку $(0,1)$.

2. Найти а) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)\,dx}{(1+x)^2}$, б) $\int |x^2-2x|dx$.

3. Найти $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x+\sin x}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin\sqrt{x}\,dx$ и $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2(1+x)\cos 2x\,dx}{x^{5/2}}$.

5. Найти $\frac{d}{dy}\int_{y^2}^{\sqrt{y}} \frac{\cos x}{x^2}dx$.

Контрольная работа № 9
«Приложения определенного интеграла»

Вариант 1

1. Найти площадь, ограниченную кривой $\rho = a\cos 3\varphi$.
2. Найти объем тела, образованного вращением области, ограниченной линиями $y=x,\quad y=2x-x^3$ вокруг оси $0x$.
3. Найти длину дуги кривой $x=6\cos t,\quad y=6\sin t,\quad z=3t,\quad 0\le t\le 2\pi$.

Вариант 2

1. Найти объем тела, образованного вращением области, ограниченной линиями $y^2=x^3,\quad x=0,\quad y=-\frac{1}{27},\quad y=8$ вокруг оси $0y$.
2. Найти площадь сектора $\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi},\quad \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.
3. Найти длину дуги кривой $x=\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2,\quad y=-\frac{4}{3}t^3+t^2,\quad z=\frac{t^3}{3},\quad 0\le t\le 1$.

Вариант 3

1. Найти объем тела, образованного вращением кривой $\begin{cases} x=a\sin^3 t \\ y=b\cos^3 t, \quad 0\le t\le 2\pi \end{cases}$ вокруг

оси $0x$.

2. Найти длину дуги кривой $\rho = \varphi^2, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$

3. Найти площадь, ограниченную кривыми $y^2 = 8x + 16, \quad x + y = 4, \quad 0 \le y \le 1.$

Контрольная работа № 10
«Функции нескольких переменных. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость»

Вариант 1

1. Найти повторные пределы и двойной, если он существует при $x \to 0, \quad y \to 0$ функции $u = \dfrac{x^3 - y}{x^3 + y}$

2. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f = |y| \sin x$

3. Найти du и d^2u для функции $u = arctg \dfrac{xy}{z}$

4. Найти du и d^2u для функции $u = \varphi\left(\sin xy, \sin \dfrac{x}{y}\right)$

Вариант 2

1. Найти повторные пределы и двойной, если он существует при $x \to \infty, \quad y \to \infty$ функции $u = \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^2}$

2. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f = y\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x^2}}$

3. Найти du и d^2u для функции $u = tg\left(e^y x\right)$

4. Найти du и d^2u для функции $u = f\left(x + y, x^2 - y^2, x^2 + z^2\right)$

Вариант 3

1. Найти повторные пределы и двойной, если он существует при $x \to +\infty, \quad y \to \pm 0$ функции $u = \dfrac{x^y}{x^y + 1}$

2. Исследовать на дифференцируемость в точке $(0, 0)$ функцию $f = y + \cos\sqrt[3]{x^2 + y^2}$

3. Найти du и d^2u для функции $u = \ln((x - 2y) z^4)$

4. Найти du и d^2u для функции $u = f\left(x^2 - y^2, \dfrac{x}{y}\right)$

Контрольная работа № 11
«Геометрический и механический смыслы градиента. Теорема о неявной функции. Условный и безусловный экстремум функций нескольких переменных»

Вариант 1

1. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y.$

2. Найти $dz(x, y)$ и $du(x, y)$ для функций $z(x, y), \; u(x, y)$, заданных системой

$$\begin{cases} x + y + z + u = a \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = b \end{cases}.$$

3. Исследовать на условный локальный экстремум функцию $u = x + y + z,$ если $x^2 + z^2 = y.$

4. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^3 - 3xy + y^3$ в точке $M(1;1;-1).$

5. Дана функция $u = xz + \frac{x}{y}.$ Найти $\frac{\partial u}{\partial l}(2,1,2),$ где l - направление градиента функции $v = xyz$ в точке $M(2,1,2).$

Вариант 2

1. Исследовать на локальный экстремум функцию $u = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz - 2yz.$

2. Найти $x'(z),\ y'(z),\ x''(z),\ y''(z)$ в точке $z_0 = 4\ \ (x(4) = 0,\ \ y(4) = -3)$ для функций $x(z),\ y(z)$, заданных системой $\begin{cases} x + xy + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2z = 1 \end{cases}.$

3. Исследовать на условный локальный экстремум функцию $u = x + 2y + 3,$ если $x^2 + y^2 = 1.$

4. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точке $M(-3;4;17).$

Дана функция $u = xyz$. Найти $\frac{\partial u}{\partial l}(1,1,1),$ где $l = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$ Найти $|grad\, u(1,1,1)|.$

Вариант 3

1. Исследовать на локальный экстремум функцию $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x.$

2. Найти $z'(x),\ y'(x),\ z''(x),\ y''(x)$ в точке $x_0 = 0\ \ (y(0) = 1,\ \ z(0) = 1)$ для функций $x(z),\ y(z)$, заданных системой $\begin{cases} x + xy + y + z = 2 \\ x^2 - y^2 - z^2 + 2 = 0 \end{cases}.$

3. Исследовать на условный локальный экстремум функцию $u = x^2 + y^2 - 12x + 16y,$ если $x^2 + y^2 = 25.$

4. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной параметрически $x = u + v,\ \ y = u^2 + v^2,\ \ z = u^3 + v^3$ в точке, где $u = 1, v = 1.$

5. Дана функция $u = xz + \frac{x}{y}.$ Найти $\frac{\partial u}{\partial l}(3,1,2),$ где l - направление градиента функции $v = xyz$ в точке $M(3,1,2).$

Контрольная работа № 12
«Сходимость числовых рядов»

Вариант 1

Исследовать сходимость числовых рядов (в случае знакопеременных рядов установить характер сходимости)

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\ln\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} ntg\,\frac{n+2}{n^2+3}.$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^p.$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n!} arctg\,\frac{1}{3^n}.$

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{4^n}{(\ln n)^n}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\arcsin\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$. 7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$.

Вариант 2

Исследовать сходимость числовых рядов (в случае знакопеременных рядов установить характер сходимости)

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+4}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{1}{2n^2}}-\cos\frac{1}{n}\right)^p$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(n!)^2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^3}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n}}arctgn$. 7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^3 n}{n^{3/2}+1}$.

Вариант 3

Исследовать сходимость числовых рядов (в случае знакопеременных рядов установить характер сходимости)

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{10} n}{n^{3/2}}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln^4 n}}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{tg^p\frac{1}{n^2}}{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^3}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot6\cdot11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{\left(3n^2+2n+1\right)^{\frac{n+3}{2}}}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)}{\sqrt[5]{n^4+2n-1}}arctg\frac{\pi}{4n}$. 7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{10}\ln^6 n}{2^n}$.

Контрольная работа № 13
«Функциональные ряды и последовательности»

Вариант 1

1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x)=\frac{nx}{1-2x+2n}$, если $a)\ x\in[0,1]$, $b)\ x\in[1,+\infty)$.

2. Исследовать на непрерывность сумму ряда $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{x}{1+n^2x^2}\right)$ при $x\geq 0$.

3. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n}{6}}{\sqrt{n^2+x^3}}$ на любом отрезке?

4. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n+1)3^n}$ на отрезке $[-3,1]$?

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{4^n}(x-4)^n$.

6. Разложить по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+\dfrac{x}{2}}}$. Определить область сходимости полученного ряда

Вариант 2

1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x)=e^{-nx^2}$, если $a)\ x\in(0,+\infty),\quad b)\ x\in[1,+\infty)$.

2. Исследовать на непрерывность сумму ряда $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}$ при $x\in R$.

3. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\left(3^{n(x-2)}+\dfrac{1}{2^{n(x+1)}}\right)$ на отрезке $[-1,2]$?

4. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-(x-1)^2 n}$ при $x\in[-1,1)$?

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\ x^n\ \cos\dfrac{\pi n}{4}$.

6. Разложить по степеням x функцию $f(x)=\int\limits_0^x\dfrac{\sin^2 t}{t^2}dt$. Определить область сходимости полученного ряда.

Вариант 3

1. Исследовать на равномерную сходимость последовательность $f_n(x)=n^{4/3}\sin\dfrac{x}{n^2}$, если $a)\ x\in R,\quad b)\ |x|\le a,\quad a>0$.

2. Исследовать на непрерывность сумму ряда $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\dfrac{x}{1+n^3x^2}\right)$ при $x\ge 0$.

3. Можно ли почленно интегрировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi n}{3}}{\sqrt{n^{3/2}+x^2}}$ на любом отрезке?

4. Можно ли почленно дифференцировать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4^n}{x^n+1}$ при $x>4$?

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}(x-2)^n$.

6. Разложить по степеням x функцию $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)(2x+3)}$ и определить область сходимости полученного ряда.

Контрольная работа № 14
«Интегралы, зависящие от параметра»

Вариант 1

1. Исследовать на непрерывность функцию $J(a)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2}\,dx, \quad a\in R.$

2. Найти $J'(\alpha)$, если $J(\alpha)=\int\limits_{\alpha^{-\frac{1}{3}}}^{\alpha^{\frac{1}{3}}} \dfrac{\cos\alpha x}{x}\,dx.$

3. Исследовать на равномерную сходимость $J(y)=\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{y}e^{-yx^2}\,dx$ при $y\in(0,+\infty).$

4. Исследовать на равномерную сходимость $J(p)=\int\limits_2^4 \dfrac{dx}{(4-x)^p}$, если $a)\ p\in(-\infty,\frac{1}{2}]$, $b)\ p\in(-\infty,1).$

5. Выразить через интеграл Эйлера $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^n\,dx}{\left(2+3x^6\right)^p}$.

6. Вычислить интеграл Эйлера $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)^3}}.$

Вариант 2

1. Исследовать на непрерывность функцию $J(a)=\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{xdx}{1+x^a}, \quad a\in(2,+\infty).$

2. Найти $J'(\alpha)$, если $J(\alpha)=\int\limits_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{3}{\alpha}} \ln\left(1+\alpha^2x^2\right)dx.$

3. Исследовать на равномерную сходимость $J(y)=\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x^2}{1+x^y}dx$ при $y\in[0,+\infty).$

4. Исследовать на равномерную сходимость $J(a)=\int\limits_0^{+\infty} x^4e^{-ax^4}\,dx,$ если $a)\ a\in[1,+\infty)$, $b)\ a\in(0,+\infty).$

5. Выразить через интеграл Эйлера $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x^{3p-1}}{1+x^6}\,dx$.

6. Вычислить интеграл Эйлера $\int\limits_0^{3} \dfrac{dx}{\sqrt[5]{x^3(3-x)^2}}.$

Вариант 3

1. Исследовать на непрерывность функцию $J(a)=\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\cos ax}{1+x^4}\,dx, \quad a\in R.$

2. Найти $J'(\alpha)$, если $J(\alpha)=\int\limits_0^{\alpha^{-1}} \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x}dx.$

3. Исследовать на равномерную сходимость $J(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty} \frac{\alpha^2-x^2}{(\alpha^2+x^2)^2}dx$ при $\alpha \in R.$

4. Исследовать на равномерную сходимость $J(p)=\int\limits_2^5 \frac{dx}{(5-x)^p}$, если $a)\ p\in(-\infty, \frac{1}{6}]$,

$b)\ p\in(-\infty, 1).$

5. Выразить через интеграл Эйлера $\int\limits_0^{+\infty} x^a e^{-x^b}\,dx, \quad a>-1, \quad b>0$.

6. Вычислить интеграл Эйлера $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

Контрольная работа № 15
«Ряды, интегралы и преобразование Фурье»

Вариант 1

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$ в интервале $(0, 2)$. Записать равенство Парсеваля.

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{4}, & x\in(-2\pi, 0); \\ \frac{1}{4}, & x\in(0,\ 2\pi) \end{cases}$. Записать равенство Парсеваля.

3. При каком значении параметра a функции $f(x)=a+x, \quad g(x)=3-2ax+x^2$ ортогональны на отрезке $[0,\ 1]$?

4. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} \sin x, & |x|\le\pi; \\ 0, & |x|>\pi. \end{cases}$

Вариант 2

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$ в интервале $(1, 5)$. Записать равенство Парсеваля.

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$. Записать равенство Парсеваля.

3. При каком значении параметра a функции $f(x)=1+ax, \quad g(x)=3-2x$ ортогональны на отрезке $[0,\ 1]$?

4. Найти преобразование Фурье функции $f(x)=\begin{cases} \cos x, & |x|<\pi; \\ 0, & |x|>\pi. \end{cases}$

Вариант 3

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$ в интервале $(-1, 3)$. Записать равенство Парсеваля.

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\arcsin(\cos x)$. Записать равенство Парсеваля.

3. При каком значении параметра a функции $f(x)=2-ax,\ \ g(x)=1+3x$ ортогональны на отрезке $[0,\ 1]$?

4. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)=e^{-x}\ \ (0<x<+\infty)$, продолжая ее четным образом.

Контрольная работа № 16
«Кратные интегралы и их приложения»

Вариант 1

1. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_y^1 e^{x^2}dxdy$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2\ge a^2$.

3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V x^2dxdydz$, где V ограничена поверхностями $z=y^2$, $z=2y^2$, $z=\dfrac{x}{3}$, $z=3x$, $z=1$.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=xy$, $z=x+y$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

Вариант 2

1. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^2-1)dxdy$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$, $x=0$, $y=0$.

3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, где V ограничена поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, $xy=1$, $xy=4$, $y=x$, $y=3x$.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$.

Вариант 3

1. Вычислить двойной интеграл $\int\limits_0^1\int\limits_{(x-1)/2}^1 tg(y^2+y)dydx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[4]{\dfrac{y}{b}}=1$, $(x-a)^2+(y-a)^2\le a^2$.

3. 3. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V ydxdydz$, где V ограничена поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $xy=9$, $xy=18$, $x=2y$, $2x=y$.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2$, $z\ge 0$, $0<a<b$.

Контрольная работа № 17
«Криволинейные и поверхностные интегралы и их приложения»

Вариант 1

1. Вычислить циркуляцию вектора $F = yi - zj + xk$ вдоль эллипса $\frac{x^2+y^2}{2} + z^2 = a^2,\ y = x$ в положительном направлении отн-но орта i.

2. С помощью формулы Остроградского найти поток вектора $F = zk$ через всю поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в направлении внешней нормали.

3. С помощью формулы Стокса найти работу векторного поля $F = 2xye^z i + x^2 e^z j + x^2 ye^z k$ вдоль винтовой линии $x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi,\ z = \varphi,\ \varphi \in [0, \pi]$ в направлении возрастания параметра φ.

4. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, вырезаемой конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, если плотность заряда $e(\bar{r}) = \gamma z \quad (\gamma = const)$.

Вариант 2

1. Вычислить работу поля $F = e^{y-z} i + e^{z-x} j + e^{x-y} k$ вдоль отрезка прямой от точки $O(0,0,0)$ до точки $M(1,3,5)$.

2. С помощью формулы Остроградского найти поток вектора $F = \bar{r} \big/ |\bar{r}|$ через всю поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в направлении внешней нормали.

3. С помощью формулы Стокса найти циркуляцию вектора $F = z^3 i + x^3 j + y^3 k$ по сечению гиперболоида $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ плоскостью $z + x = 0$ в положительном направлении отн-но орта j

4. Определить массу, распределенную на части поверхности гиперболического параболоида $2az = x^2 - y^2$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, если ее плотность $\mu(\bar{r}) = \alpha |z| \quad (\alpha = const)$.

Вариант 3

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\cup OA} (F, d\bar{r})$, если $F = -yzi + xzj + xyk,\ \cup OA -$ первый виток винтовой линии $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = ht \quad (0 \le t \le 2\pi)$.

2. С помощью формулы Остроградского найти поток векторного поля $F = (y+z)i + (z+x)j + (x+y)k$ через всю поверхность симплекса $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le a^2$ в направлении внешней нормали.

3. С помощью формулы Грина найти циркуляцию вектора $F = (\cos x + \sin y)i + x\cos y j$ вдоль эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ по часовой стрелке.

4. Определить суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности двуполостного гиперболоида $z^2 = x^2 + y^2 + a^2 \quad \left(a \le z \le a\sqrt{2}\right)$, если плотность заряда $e(\bar{r}) = \gamma z \quad (\gamma = const)$.

Контрольная работа № 18
«Элементы теории поля»

Вариант 1

1. В каких точках пространства градиент поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ перпендикулярен оси $0z$?

2. Найти векторные линии поля $F = yi - xj$.

3. Найти массу части эллипса $x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,$ расположенной в первой четверти,

если ее плотность $\mu(x,y)=ay.$

4.Найти площадь боковой поверхности цилиндра $y=\frac{3}{8}x^2,$ ограниченной плоскостями $z=0,\quad x=0,\quad z=x,\quad y=6.$

5. Вычислить работу силового поля $F=xyi-x^2yj$ вдоль дуги $\bar{r}=ti+t^2j,\quad 0\le t\le 2.$

6. Найти поток вектора $F=xi-yj$ через верхнюю часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2,\quad x^2+y^2\le 1.$

7. С помощью формулы Остроградского найти поток вектора $F=(y+z)i+(z+x)j+(x+y)k$ через внешнюю сторону поверхности симплекса $x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0,\quad x+y+z\le 1.$

8. С помощью формулы Грина найти циркуляцию вектора $F=y\cos xi+(\cos y+\sin x)j$ вдоль эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ против часовой стрелки.

9. Найти $rot\left(rotF\right),$ если $F=(z-y)i+(y+2x)j+\left(x^2-2z\right)k.$

10. Проверить потенциальность и найти потенциал поля $F=\left(3x^2y-y^3\right)i+\left(x^3-3xy^2\right)j.$

Вариант 2

1. Найти производную функции $u=\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+z$ в точке $P(2,1,1)$ по направлению прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{2}$ в сторону возрастания поля.

2. Убедиться в ортогональности линий уровня скалярных полей $u=x^2-y^2,\quad v=xy.$

3. Найти массу дуги конической винтовой линии $x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t,$ от точки $O(0,0,0)$ до точки $A(a,0,a),$ если ее плотность $\rho=\gamma e^t.$

4. Определить сумм. электрический заряд, распределенный на части поверхности параболоида $2az=x^2+y^2,$ вырезаемой из него цилиндром $x^2+y^2=a^2,$ если плотность заряда $e(x,y,z)=\gamma\sqrt{z}.$

5. Вычислить работу силового поля $F=zi+xj+yk$ вдоль дуги $\bar{r}=ti+t^2j+t^3k,\quad 0\le t\le 1.$

6. Найти поток вектора $F=x^2i+y^2j+zk$ через поверхность параболоида $z=\frac{H}{R^2}\left(x^2+y^2\right),$ вырезаемую цилиндром $x^2+y^2=R^2,$ ориентированную в соответствии с напр-ем орта $k.$

7. С помощью формулы Остроградского найти поток вектора $F=x^3i+y^3j-z^3k$ через всю поверхность куба $0\le x\le a,\quad 0\le y\le a,\quad 0\le z\le a$ в направлении внешней нормали.

8. С помощью формулы Стокса найти циркуляцию вектора $F=(y+z)i+(x+z)j+(x+y)k$ по сечению сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ плоскостью $x+y+z=0$ в положительном направлении относительно орта $i.$

9. Найти $grad\left(divF\right),$ если $F=x^3i+y^3j+z^3k.$

10. Проверить соленоидальность поля $F=\frac{xi-yj}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\left(x^2-y^2\right)zk}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}.$

Вариант 3

1. Найти производную поля $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ в точке $P(x_0,y_0,z_0)$ в направлении радиус-вектора $\bar{r}=OP$ этой точки.

2. В каких точках пространства градиент поля $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ параллелен оси Oz?

3. Найти массу окружности $x^2+y^2=Rx,$ если ее плотность $\mu(\bar{r})=|\bar{r}|,\quad (\bar{r}=(x,y)).$

4. Опр-ть суммарный электрический заряд, распределенный на части поверхности цилиндра $x^2+y^2=R^2,$ вырез-ой конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$, если плотность заряда $e(\bar{r})=\gamma z\quad (\gamma=const).$

5. Вычислить работу поля $F=e^{y-z}i+e^{z-x}j+e^{x-y}k$ вдоль отрезка прямой от точки $O(0,0,0)$ до точки $M(1,3,5).$

6. Найти поток радиус-вектора $\bar{r}=(x,y,z)$ через поверхность конуса $z=1-\sqrt{x^2+y^2}\quad (0\le z\le 1)$ в направлении внешней нормали.

7. С помощью формулы Остроградского найти поток вектора $F=zk$ через внешнюю часть поверхности тела $1\le x^2+y^2+z^2\le 4.$

8. С помощью формулы Стокса найти циркуляцию вектора $F=(y+z)i+(z+x)j+(x+y)k$ вдоль эллипса $x=a\sin^2 t,\quad y=2a\sin t\cos t,\quad z=a\cos t,\quad t\in[0,\pi]$ в направлении возрастания параметра.

9. Найти величину и направление $rotF$ в точке $M(1,2,-2),$ если $F=\frac{y}{z}i+\frac{z}{x}j+\frac{x}{y}k.$

10. Проверить потенциальность поля $F=\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{x^2}\right)i+\left(\frac{1}{x}-\frac{z}{y^2}\right)j+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{z^2}\right)k$ и найти его потенциал.

Примерный перечень вопросов к экзамену

Программа экзамена за 1-ой семестр

1. Понятие минимума (максимума) числового множества.
2. Леммы о единственности минимального элемента и принцип минимального элемента.
3. Принцип математической индукции.
4. Неравенство Бернулли.
5. Бином Ньютона.
6. Определения модуля вещественного числа, целой и дробной частей числа.
7. Теоремы о плотности Q в R и $R\setminus Q$ в $R.$
8. Определения точной верхней и точной нижней граней числового множества.
9. Определения биекции и равномощности множеств. Определение счетного множества.
10. Определение предела числовой последовательности.
11. Теорема о единственности предела числовой последовательности.
12. Арифметические свойства предела числовой последовательности.
13. Свойства предела числовой последовательности, связанные с неравенствами.
14. Определение ограниченной последовательности.
15. Необходимый признак сходимости последовательности.
16. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности.
17. Теорема о пределе подпоследовательности.

18. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
19. Определение фундаментальной последовательности.
20. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
21. Критерий Коши расходимости числовой последовательности.
22. Определения неограниченной, бесконечно большой и бесконечно малой последовательности.
23. Теорема о пределе произведения ограниченной и бесконечно малой последовательностей.
24. Теорема о специальном представлении членов сходящейся последовательности.
25. Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями.
26. Ряд сравнения бесконечно больших.
27. Определения предела функции по Гейне и по Коши.
28. Определения односторонних пределов.
29. Свойства предела функции.
30. Критерий Коши существования предела функции.
31. Первый и второй замечательные пределы.
32. Определение бесконечно малой и бесконечно большой функции.
33. Теорема о специальном представлении функции, имеющей предел.
34. О-символика и сравнение функций.
35. Ряд эквивалентных функций при $x \to 0$.
36. Определения непрерывности функции по Гейне и по Коши.
37. Определение непрерывности на языке приращений.
38. Свойства непрерывных функций.
39. Определение точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.
40. Теорема о точках разрыва монотонной на отрезке функции.
41. Глобальные свойства функций непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши).
42. Определение равномерно непрерывной функции.
43. Теорема Кантора.
44. Определение предельной точки множества.
45. Определения открытого и замкнутого множеств и связь между ними.
46. Свойства замкнутых и открытых множеств.
47. Определение компактного множества в R.
48. Определение открытого покрытия.
49. Лемма Бореля.
50. Обобщенная теорема Кантора.
51. Определение производной функции в точке.
52. Определение дифференцируемости функции в точке.
53. Теорема о связи дифференцируемости и непрерывности функции.
54. Уравнение касательной к графику функции.
55. Геометрический смысл производной и дифференциала.
56. Дифференцирование сложной и обратной функций.
57. Правила дифференцирования.
58. Формула Лейбница.
59. Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о среднем).
60. Достаточное условие монотонности.
61. Необходимое условие экстремума.
62. Первое и второе достаточные условия экстремума.
63. Достаточное условие выпуклости графика функции.
64. Необходимое условие перегиба.
65. Первое и второе достаточные условия перегиба.

66. Определения вертикальной и наклонной асимптот графика функции.
67. Первое и второе правила Лопиталя.
68. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
69. Свойство единственности многочлена Тейлора.
70. Третье достаточное условие экстремума и перегиба.

Образцы билетов к экзамену за 1-ой семестр

Билет №1

1. Принцип математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.
2. Третье достаточное условие экстремума.

Задачи к билету №1

1. Пусть в некоторой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности x_n. Следует ли из этого условия, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2. При различных значениях параметра a исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Билет №2

1. Понятие модуля, целой и дробной части вещественного числа. Плотность Q в R.
2. Третье достаточное условие перегиба.

Задачи к билету №2

1. Пусть в некоторой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности x_n. Следует ли из этого условия, что x_n ограничена?

2. Для каких функций $f(x)$ композиции $f(\sin x)$ и $\sin(f(x))$ непрерывны?

Билет №3

1. Понятие счетного множества. Свойства счетных множеств. Счетность Q.
2. Первое и второе правила Лопиталя.

Задачи к билету №3

1. Пусть в любой окрестности точки a лежит бесконечно много членов последовательности x_n. Следует ли из этого условия, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$?

2. Исследовать на дифференцируемость функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \notin Q, \\ 1, & x \in Q. \end{cases}$$

Программа экзамена за 2-ой семестр

1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.
2. Основные методы интегрирования неопределенного интеграла.
3. Понятие определенного интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости. Геометрический смысл определенного интеграла.
4. Верхние и нижние интегральные суммы Дарбу и их свойства.
5. Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Критерий Римана интегрируемости функции.
6. Классы функций интегрируемых по Риману.

7. Свойства определенного интеграла.
8. Понятие множества Лебеговской меры нуль и их свойства.
9. Критерий непрерывности функции в точке в терминах колеба-ния функции в точке.
10. Критерий Лебега-1 интегрируемости функции по Риману. Аль-тернативная формулировка критерия Лебега-2.
11. Интегрируемость сложной и монотонной функций.
12. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница.
13. Основные методы интегрирования определенного интеграла.
14. Первая теорема о среднем для определенного интеграла и следствия из нее.
15. Вторая теорема о среднем для определенного интеграла и следствия из нее.
16. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
17. Неравенства содержащие интегралы (неравенства Гельдера, Минковского, Коши-Буняковского).
18. Понятие несобственного интеграла первого и второго рода. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.
19. Признак сравнения сходимости несобственных интегралов в форме неравенств и в предельной форме.
20. Признак Дирихле-Абеля.
21. Основные методы интегрирования несобственных интегралов.
22. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.
23. Понятие функции ограниченной вариации. Теорема о сумме полных вариаций.
24. Теорема о необходимых и достаточных условиях ограниченности вариации функции.
25. Понятие интеграла Стилтьеса и его свойства.
26. Формула для вычисления интеграла Стилтьеса.
27. Пространство R^n. Сходимость и полнота в R^n. Критерий компактности в R^n.
28. Пространство R^n. Неравенство Коши-Буняковского для векторов.
29. Непрерывные функции в R^n. Непрерывности отображений конечномерных пространств.
30. Равномерная непрерывность функций в R^n. Теорема Кантора.
31. Квадратичные формы. Лемма о знакоопределенных квадратичных формах. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм (без доказательства).
32. Понятие дифференцируемости функции многих переменных. Необходимое условие дифференцируемости.
33. Понятие частной производной. Первое достаточное условие дифференцируемости.
34. Теорема о дифференцировании сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила дифференцирования.
35. Производная по направлению. Градиент функции и его свойства.
36. Геометрический смысл дифференциала функции. Касательные и нормальный векторы поверхности.
37. Частные производные высших порядков. Теоремы Шварца и Юнга. Второе достаточное условие дифференцируемости.
38. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Пеано.
39. Формула Тейлора для функций многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа.
40. Понятие локального экстремума функции многих переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума функции многих переменных.
41. Теорема о неявной функции.

42. Теорема о системе неявных функций и следствие из нее.
43. Понятие условного экстремума функции многих переменных и методы его нахождения: метод исключения (прямой метод), метод множителей Лагранжа. Экстремум функции на множестве.

Образцы билетов к экзамену за 2-ой семестр

Билет №1

3. Понятие определенного интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости. Геометрический смысл определенного интеграла.
4. Частные производные высших порядков. Теоремы Шварца.

Задачи к билету №1

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int\limits_0^x e^{t^2}\,dt}{\int\limits_0^x e^{2t^2}\,dt}$.

2. Исследовать на непрерывность в точке $(0;\,0)$ функцию

$$f(x,\,y)=\begin{cases} x^2\cdot\sin\dfrac{1}{x}+y^2, & x\neq 0,\\ y^2, & x=0. \end{cases}$$

3. Проверить, что отображение $f: R^2\to R^2$, заданное соотношением $f(x,y)=\left(e^x\cos y,\, e^x\sin y\right)$, локально обратимо в окрестности каждой точки из R^2.

Билет №2

1. Верхние и нижние интегральные суммы Дарбу и их свойства. Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу
2. Понятие локального экстремума функции многих переменных. Необходимое условие локального экстремума функции многих переменных.

Задачи к билету №2

1. Следует ли из интегрируемости разности двух функций интегрируемость уменьшаемого и вычитаемого? Ответ обосновать.

2. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x^2+y^2}\,\ln\left(x^2+y^2\right)$?

3. Проверить, что уравнение $x^2z^3+y^3z^2+z^2x^3=8$ однозначно определяет функцию $z=z(x,y)$ в окрестности точки $(1;-1;2)$.

Билет №3

1. Критерий Римана интегрируемости функции.
2. Достаточное условие локального экстремума функции многих переменных.

Задачи к билету №3

1. Найти производную $\dfrac{d}{db}\int\limits_a^{b^2} e^{-x^2}\,dx$.

2. Исследовать на непрерывность в точке $(0;\,0)$ функцию

$$f(x,\,y)=\begin{cases} \sqrt[3]{xy}\cdot\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

3. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x - 3y + z^2 = 0, \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

однозначно определяет отображения $y = y(x)$ и $z = z(x)$ в окрестности точки $(0; 0; 0)$.

Программа экзамена за 3-ой семестр

1. Понятие числового ряда, сходимости и расходимости числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов.
2. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимый признак сходимости (в двух формах).
3. Признак сравнения (в двух формах).
4. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами:
   - признак Даламбера;
   - корневой признак Коши;
   - признак Раабе;
   - интегральный признак Коши;
   - признак Куммера;
   - признак Бертрана;
   - признак Гаусса.
5. Знакочередующиеся числовые ряды. Признак Лейбница.
6. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Достаточные признаки абсолютной сходимости числовых рядов.
7. Свойства абсолютно и условно сходящихся числовых рядов. Теорема Римана.
8. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов. Преобразование Абеля.
9. Понятие функциональной последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональных последовательностей. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.
10. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей:
    - теорема о перестановке пределов;
    - теорема Дини;
    - теорема о почленном интегрировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей;
    - теорема о почленном дифференцировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей.
11. Понятие функционального ряда. Поточечная и равномерная сходимость функциональных рядов. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.
12. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов:
    - теорема о перестановке пределов;
    - теорема Дини для функциональных рядов;
    - теорема о почленном интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов;
    - теорема о почленном дифференцировании равномерно сходящихся функциональных рядов.
13. Признаки Дирихле, Абеля и Чоунди-Джолиффе равномерной сходимости функциональных рядов.
14. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Область сходимости и радиус сходимости степенного ряда.

15. Свойства сходящихся степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд.

16. Теорема Вейерштрасса для степенных рядов.

17. Равномерное по параметру стремление функции двух переменных к пределу. Критерий Коши.

18. Свойства равномерного стремления функции к предельной:

- теорема о непрерывности предельной функции;
- теорема Дини;
- теорема об интегрировании предельной функции;
- теорема о дифференцировании предельной функции;
- теорема о равномерном стремлении в прямоугольнике.

19. Собственные интегралы, зависящие от параметра с постоянными пределами интегрирования и их свойства (непрерывность по параметру, интегрирование и дифференцирование по параметру).

20. Собственные интегралы, зависящие от параметра с переменными пределами интегрирования и их свойства (непрерывность по параметру, дифференцирование по параметру).

21. Несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости.

22. Достаточные признаки равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода зависящих от параметра:

- признак Вейерштрасса;
- признак Дирихле;
- признак Абеля.

23. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов 1-го рода, зависящих от параметра:

- теорема о непрерывности несобственных интегралов 1-го рода;
- теорема Дини для несобственных интегралов 1-го рода;
- теорема об интегрировании по отрезку несобственных интегралов 1-го рода;
- теорема об интегрировании по лучу несобственных интегралов 1-го рода;
- теорема о дифференцировании по параметру несобственных интегралов 1-го рода.

24. Эйлеровы интегралы 2-го рода. Γ-функция и ее свойства (непрерывность, бесконечная дифференцируемость, формулы приведения и дополнения).

25. Эйлеровы интегралы 1-го рода. B-функция и ее свойства (область определения, свойство симметрии, формула приведения).

26. Связь между эйлеровыми интегралами.

Образцы билетов к экзамену за 3-ой семестр

Билет №1

1. Признак сравнения сходимости числовых рядов с положительными членами (в двух формах).
2. Собственные интегралы, зависящие от параметра с переменными пределами интегрирования и их свойства (непрерывность по параметру, дифференцирование по параметру).

Задачи к билету №1

1. Доказать, что если последовательность $\{n\,a_n\}, a_n \geq 0$ ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

сходится.

2. Определить область существования функции $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{5/2}}$ и исследовать ее на дифференцируемость.

3. Найти $I'(\alpha)$, если $I(\alpha)=\int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}}\ln\left(1+\alpha^2x^2\right)\frac{dx}{x}.$

Билет №2

1. Признак Раабе сходимости числовых рядов с положительными членами.
2. Свойства сходящихся степенных рядов. Ряды Тейлора и Маклорена. Единственность разложения функции в степенной ряд.

Задачи к билету №2

1. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ сходится, то сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$.
2. Показать, что последовательность $f_n(x)=nx\left(1-x^2\right)^n$ сходится на отрезке $[0;1]$ к непрерывной функции $f(x)$, но $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$.
3. Доказать, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nx}{x^2\cdot n^4}$ непрерывна на R^1.

Билет №3

1. Интегральный признак Коши сходимости числовых рядов с положительными членами.
2. Собственные интегралы, зависящие от параметра с постоянными пределами интегрирования и их свойства (непрерывность по параметру, интегрирование и дифференцирование по параметру).

Задачи к билету №3

1. Является ли сходящимся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, a_n>0$, если при любом $p\in N$ $\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right)=0$?
2. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, a_n\geq 0$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$.
3. Доказать, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x\cdot n^3}$ непрерывна на R^1.

Программа экзамена за 4-ой семестр

1. Ортонормированные системы евклидовых пространств. Понятие общего ряда Фурье. Теорема о наилучшем приближении и следствия из нее (общие неравенство и равенство Бесселя).

2. Замкнутые и полные ортонормированные системы в евклидовых пространствах. Равенство Парсеваля. Теорема единственности.
3. Теорема Вейерштрасса для периодических функций.
4. Замкнутость тригонометрической системы функций и следствия из нее (равенство Парсеваля, теоремы о сходимости в среднем, о почленном интегрировании, единственности и равномерной сходимости тригонометрических рядов Фурье).
5. Равномерная сходимость и почленное дифференцирование тригонометрических рядов Фурье. Порядок роста тригонометрических коэффициентов Фурье.
6. Лемма о частичной сумме тригонометрического ряда Фурье и следствие из нее.
7. Понятие интеграла Фейера. Ядро Фейера и его свойства.
8. Теорема Фейера о суммировании по Чезаро тригонометрических рядов Фурье.
9. Понятие интеграла Фурье. Теорема о представлении функции интегралом Фурье. Комплексная форма записи интеграла Фурье.
10. Преобразование Фурье и его свойства.
11. Понятие двойного интеграла для прямоугольной области. Необходимое условие интегрируемости.
12. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу и их свойства.
13. Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Лемма Дарбу.
14. Критерий интегрируемости Дарбу.
15. Критерий интегрируемости Римана. Классы функций интегрируемых по Риману.
16. Определение двойного интеграла для произвольной области. Геометрический смысл двойного интеграла.
17. Свойства двойного интеграла (уметь доказывать три из них по выбору студента).
18. Сведение двойного интеграла к повторному.
19. Замена переменных в двукратном интеграле (вопрос будет разбит на три билета: линейный случай, лемма о площади образа, нелинейный случай, в каждом из которых надо дать формулировку теоремы, изложить общую схему доказательства и привести развернутое доказательство одного из этапов).
20. Понятие криволинейного интеграла первого и второго рода, их физический смысл и зависимость от ориентации кривой.
21. Свойства криволинейных интегралов и теорема о их вычислении. Формула связи интегралов 1-го и 2-го рода.
22. Понятие поверхностного интеграла первого и второго рода, их физический смысл и зависимость от ориентации поверхности.
23. Теорема о вычислении поверхностных интегралов.
24. Формула Грина.
25. Условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.
26. Операции над векторными и скалярными полями.
27. Теорема Остроградского-Гаусса. Соленоидальные векторные поля.
28. Теорема Стокса. Потенциальные векторные поля.

Образцы билетов к экзамену за 4-ой семестр

Билет №1

1. Понятие двойного интеграла для прямоугольной области. Необходимое условие интегрируемости.
2. Преобразование Фурье и его свойства.

Задачи к билету №1

1. Найти $div\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$ и $rot\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$, если $\vec{r}=(x,y,z)$.

2. Найти преобразование Фурье функции $\frac{d^2}{dx^2}\left(xe^{-|x|}\right)$.

3. Пусть $D\subset R^2$ -- односвязная плоская область, $L\subset D$ -- кусочно-гладкий замкнутый контур, $\vec{\nu}$ -- единичный вектор внешней нормали к L, S -- фигура, ограниченная контуром L. Доказать, что для любой функции $u\in C^2(D)$ гармонической в D, т.е. $\Delta u=0$, справедливо равенство

$$\oint_L u\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}dl=\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,$$ здесь $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Билет №2

1. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу и их свойства. (Доказать первые три свойства)
2. Понятие интеграла Фурье. Теорема о представлении функции интегралом Фурье. Комплексная форма записи интеграла Фурье.

Задачи к билету №2

1. Доказать, что $rot(u\cdot\vec{a})=u\cdot rot\,\vec{a}+grad\,u\times\vec{a}$.

2. Пусть $F[f(x)]=g(\lambda)$, доказать равенство $F[\sin ax\cdot f(x)]=\frac{g(\lambda-a)-g(\lambda+a)}{2i}$.

3. Пусть S -- кусочно-гладкая замкнутая поверхность, $\vec{\nu}$ -- единичный вектор внешней нормали к S, $\vec{r}$ -- вектор из точки $\vec{x}_0$, лежащей вне S, в точку $\vec{x}$, лежащую на поверхности S. Вычислить интеграл Гаусса

$$\oiint_S\frac{\cos(\vec{r},\vec{\nu})}{|\vec{r}|^2}d\sigma.$$

Билет №3

1. Верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу и их свойства. (Доказать 4 и 5 свойства). Понятие верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Лемма Дарбу.
2. Теорема Вейерштрасса для периодических функций.

Задачи к билету №3

1. Найти $rot\left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right)$, если $\vec{r}=(x,y,z)$.

2. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $\sin^4 x$.

3. Пусть $D\subset R^2$ -- односвязная плоская область, $L\subset D$ -- кусочно-гладкий замкнутый контур, $\vec{\nu}$ -- единичный вектор внешней нормали к L, S -- фигура, ограниченная контуром L. Доказать, что для любой функции $u\in C^2(D)$ гармонической в D, т.е. $\Delta u=0$, справедливо равенство

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}\, dl = 0, \quad \text{здесь} \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Разработчик: профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Фалалеев Михаил Валентинович,
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений
Орлов Сергей Сергеевич

Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.